ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის

სახელმწიფო უნივერსიტეტი

სამაგისტრო ნაშრომი

არალოკალური საკონტაქტო ამოცანის შესახებ მეორე რიგის მუდმივკოეფიციენტებიანი დიფერენციალური განტოლებისათვის ერთგანზომილებიან და ორგანზომილებიან შემთხვევებში

მაგისტრანტი: გიორგი ილიაევი

ხელმძღვანელები:
ასოცირებული პროფესორი თინათინ დავითაშვილი,
ასოცირებული პროფესორი ჯემალ როგავა

2024

ანოტაცია

სამაგისტრო ნაშრომი შეეხება არალოკალურ საკონტაქტო ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის საკითხებს როგორც ჩვეულებრივი, ისე კერძოწარმოებულებიანი დიფერენციალური განტოლებების შემთხვევაში.

ნაშრომის პირველ ნაწილში განხილულია არალოკალური საკონტაქტო ამოცანები მეორე რიგის არაერთგვაროვანი ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის მუდმივი კოეფიციენტებით, არალოკალური საკონტაქტო პირობებით, როგორც ორ წერტილის, ასევე მრავალი წერტილის შემთხვევაში. დასმული ამოცანებისათვის აგებულია ანალიზური ამონახსენი, ასევე განხილულია იტერაციული პროცესი, რომელსაც არალოკალური საკონტაქტო ამოცანის ამოხსნა დაყავს მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებებისათვის პირველი სასაზღვრო ამოცანების მიმდევრობაზე, ასეთი ამოცანების ამოხსნის მეთოდები კი კარგად არის შესწავლილი. დამტკიცებულია აღნიშნული იტერაციული პროცესის კრებადობა. რიცხვითი ამოხსნებისთვის გამოყენებულია სასრულ სხვაობიანი მეთოდი. ორ წერტილოვანი საკონტაქტო პირობის შემთხვევაში ჩატარებულია გამოთვლითი ექსპერიმენტი სხვადასხვა მონაცემებით.

ნაშრომის მეორე ნაწილში განხილულია არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა ორგანზომილებიანი, მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ელიფსური განტოლებისთვის, კერძოდ, არალოკალური საკონტაქტო სასაზღვრო პირობით ორი წერტილის შემთხვევაში. განსახილველ არედ აღებულია მართკუთხედი. დამტკიცებულია ამოცანის რეგულარული ამონახსენის არსებობა და ერთადერთობა. ამოცანის ამოსახსნელად აგებულია იტერაციული მეთოდი, დამტკიცებულია მისი კრებადობა. წინა შემთხვევის მსგავსად, ამოცანა აქაც დადის კლასიკური ამოცანების მიმდევრობაზე, რომლის რიცხვითი ამოხსნისათვის გამოყენებულია სასრულ სხვაობიანი მეთოდი.

შემდგომი კვლევის მიმართულების გამოკვეთის მიზნით ნაშრომში შესწავლილია წრიული არისთვის დასმული დირიხლეს კლასიკური ამოცანა ელიფსური განტოლებისათვის. დასმულია ზოგიერთი არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა წრიული არისათვის.

Abstract

This master's thesis addresses the numerical solutions of non-local contact problems for both ordinary and partial differential equations.

In the first part of the thesis, we explore non-local contact problems for non-homogeneous ordinary differential equations (ODEs) of the second order with constant coefficients, considering both two-point and multi-point non-local contact conditions. Analytical solutions for these problems are constructed, and an iterative process is developed which reduces the solution of the non-local problem to a sequence of classical boundary value problems for second-order ODEs. The numerical methods for their solution are well-established. The iterative process is constructed, and the finite difference method is employed for the numerical solution.

Computational experiments are conducted under various conditions for the two-point contact problem.

The second part of the thesis focuses on non-local contact problems for the two-dimensional linear elliptic equation with constant coefficients, specifically under two-point non-local contact boundary conditions within a rectangular domain. The existence and uniqueness of the regular solution are proved. An iterative method is considered and investigated for solving the stated problem. Similar to the ODE case, this problem also follows a sequence of classical problems, with the finite difference method utilized for numerical solutions.

To outline future research directions, the classical Dirichlet problem for the elliptic equation is studied. Also, several non-local contact problems for circular arcs are stated.

სარჩევი

შესავალი 5

თავი I. არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა ერთ განზომილებიანი, მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის 7

I.1. არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის, ორი წერტილის შემთხვევაში.... 7

I.2 რიცხვითი მაგალითი (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანისათვის 11

I.3 რიცხვითი ექსპერიმენტი (1.2.1)-(1.2.3) ამოცანისთვის 16

I.4 არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის, მრავალი წერტილის შემთხვევაში.. 19

I.5 რიცხვითი მაგალითი (1.4.1)-(1.4.3) ამოცანისთვის.. 23

თავი II. არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა ორგანზომილებიანი, მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ელიფსური განტოლებისათვის 28

II.1 არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა ორგანზომილებიანი, მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ელიფსური განტოლებისათვის, ორი წერტილის შემთხვევაში.. 28

II.2 რიცხვითი მაგალითი (2.1.1)-(2.1.5) ამოცანისთვის 35

თავი III. არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა დირიხლეს კლასიკური ამოცანისთვის წრეზე. 40

III.1 დირიხლეს კლასიკური ამოცანა წრეზე.. 40

III.2 არალოკალური და საკონტაქტო ამოცანების მაგალითები წრიულ არეზე............. 43

გამოყენებული ლიტერატურა.. 45

შესავალი

არალოკალური სასაზღვრო მნიშვნელობის ამოცანების კვლევა მე-20 საუკუნიდან იწყება. არალოკალური სასაზღვრო და საწყის-სასაზღვრო ამოცანების შესწავლა, განვითარება და შესაბამისი რიცხვითი მეთოდების ანალიზი წარმოადგენს გამოყენებითი მათემატიკის ერთ-ერთ მნიშვნელოვან სფეროს. ტრადიციული სასაზღვრო პირობები ხშირად სათანადოდ ვერ აღწერს იმ რთულ პროცესებს, რომლებიც გვხვდება რეალურ გარემოში. აღნიშნული ტიპის ამოცანები გვხვდება მეცნიერებისა და ადამიანის საქმიანობის მრავალ სფეროში - ფიზიკაში, ბიოლოგიაში, მასალათმცოდნეობაში, ინჟინერიასა და სხვა.

[1-4] შრომებმა საფუძველი ჩაუყარეს არალოკალურ სასაზღვრო პირობების ამოცანების განვითარებასა და მათი რიცხვითი ამოხსნის მეთოდებს. პირველ რიგში უნდა ვახსენოთ T.Carleman [1], ვისმა კვლევამაც ხაზი გაუსვა ტრადიციული სასაზღვრო პირობების შეზღუდულობას და საფუძველი ჩაუყარა არალოკალური სასაზღვრო პირობების განვითარებას. მისმა შრომებმა გზა გაუკვალა მომდევნო კვლევებს. მე-20 საუკუნის შუა ხანებში მნიშვნელოვანი მიღწევები ეკუთვნის R.Beals [2], რომელმაც განავითარა კარლემანის მიდგომები და დაამატა მას ახალი მეთოდოლოგიები და კვლევები, კერძოდ, განიხილა არალოკალური სასაზღვრო მნიშვნელობის ამოცანები ელიფსური კერძოწარმოებულიანი დიფერენციალური განტოლებებისათვის.

ამ თემაზე საუბრისას გვერდს ვერ ავუვლით J.R Canon(1963) [3] და ბიწაძე-სამარსკის (1969) [4] შრომებს, რომლებმაც მნიშვნელოვანი ბიძგი მისცა ამ მიმართულებით მრავალს კვლევას. Canon-ის კვლევა შეეხებოდა სითბოგამტარებლობის ამოცანისათვის დასმულ არალოკალურ სასაზღვრო მნიშვნელობის ამოცანას. ანდრია ბიწაძისა და ალექსანდრ სამარსკის კვლევები კი ეხებოდა პლაზმური პროცესების მათემატიკურ მოდელირებისას წამოჭრილ ახალი ტიპის არალოკალურ საკონტაქტო ამოცანას ელიფსური განტოლებისათვის. აღნიშნული ამოცანა ახლა ცნობილია, როგორც ბიწაძე-სამარსკის ამოცანა. არალოკალური სასაზღვრო მნიშვნელობის ამოცანების კვლევა მნიშვნელოვნად გაიზარდა მე-20 საუკუნის 80-იან წლებში.

M.P.Sapagovas-ის ნაშრომში [5] განხილულია ორგანზომილებიანი პუასონის განტოლება არალოკალური ინტეგრალური სასაზღვრო პირობებით ერთ-ერთი მიმართულებით, მართკუთხა არეში. ამ ამოცანისთვის აგებულია მაღალი რიგის სიზუსტის სხვაობიანი სქემა, შესწავლილია მისი ამოხსნადობა.

A.Ashyralyev-ის შრომაში [6] განხილულია არალოკალური სასაზღვრო მნიშვნელობის ამოცანა ელიფსური დიფერენციალური განტოლებისათვის ბანახის სივრცეში მკაცრად დადებითი ოპერატორით, ამ ამოცანისთვის კი აგებულია ორ ეტაპიანი სხვაობიანი სქემა მეორე რიგის სიზუსტით.

ამ ტიპის ამოცანაზე საუბრისას უნდა ვახსენოთ პროფესორი დავით გორდეზიანი, რომელმაც პირველად დასვა არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა ორგანზომილებიანი კერძოწარმოებულიანი განტოლებებისთვის. [7] ნაშრომში დ. გორდეზიანმა და ი. მელაძემ გამოიკვლიეს სასაზღვრო მნიშვნელობის ამოცანა არალოკალური საკონტაქტო პირობებით მეორე რიგის წრფივი ელიფსური განტოლებისათვის ორ-განზომილებიან

არეში, მათ ააგეს იტერაციული პროცესი, რომელიც საშუალებას გვაძლევს არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა დავიყვანოთ კლასიკური სასაზღვრო მნიშვნელობის ამოცანების მიმდევრობის ამოხსნამდე, კერძოდ, დირიხლეს ამოცანების მიმდევრობის ამოხსნამდე.

ერთობ მნიშვნელოვანია ის კვლევებიც, რომლებიც ამ მიმართულებით უახლოეს წარსულში ჩატარდა, კერძოდ, [8] ნაშრომში განხილულია არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის, აგებულია დასმული ამოცანის ანალიზური ამონახსენი და რაც მთავარია ამ ამოცანის რიცხვითი ამონახსენის მოსაძებნად აგებულია სხვაობიანი სქემა.

წინამდებარე ნაშრომის პირველ თავი ეყრდნობა [8-9] კვლევებს. განხილულია არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის, ასევე განხილულია ანალიზური ამონახსენის აგების საკითხი. დასმული ამოცანისთვის განხილულია იტერაციული პროცესი და ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტი, სადაც რიცხვითი ამოხსნისთვის გამოყენებულია სასრულ სხვაობიანი მეთოდი.

პირველ თავში მოყვანილია როგორც არსებული შედეგები, რომლებიც მასალის შესწავლისას გამოვიყენე, ასევე განხილულია ის შემთხვევები, რომლებსაც ზემოხსენებულ ნაშრომები არ ფარავს. კერძოდ, ნაშრომის პირველი თავის მეორე ნაწილი ეთმობა ერთ-განზომილებიან მუდმივკოეფიციენტებიან მრავალწერტილოვან არალოკალურ საკონტაქტო ამოცანას, რომლისთვისაც აგებულია ანალიზური ამონახსნი. ამ ამოცანისთვის ასევე აგებულია იტერაციული პროცესი და ჩატარებულია რიცხვითი გამოთვლები, სადაც ყოველ იტერაციაზე დიფერენციალური ამოცანის ამოხსნისათვის გამოყენებულია სასრულ სხვაობიანი მეთოდი. აგებულმა იტერაციულმა განხილულმა მეთოდმა დაგვანახა, რომ რიცხვითი ამონახსენის სიზუსტე და იტერაციების რაოდენობა დამოკიდებულია ამოსახსნელი ამოცანის საკონტაქტო პირობაში მონაწილე წერტილების რაოდენობაზე.

რაც შეეხება, ნაშრომის მეორე ნაწილს, აქ კვლევის არეალი იცვლება. კერძოდ, განვიხილავთ არალოკალურ საკონტაქტო ამოცანას ორგანზომილებიანი მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ელიფსური განტოლებისათვის, სადაც განსახილველ არედ აღებულია მართკუთხედი. ნაშრომის ეს ნაწილი ეყრდნობა [7],[10] შრომებს. ამოცანის რიცხვითი ამოხსნის მიზნით აქაც აგებულია შესაბამისი იტერაციული პროცესი და ჩატარებულია რიცხვითი ექსპერიმენტები.

ნაშრომის ბოლო ნაწილში განხილულია და შესწავლილია კლასიკური სასაზღვრო ამოცანა ელიფსური განტოლებისათვის წრიული არეზე, და სამომავლო კვლევისათვის დასმულია რამდენიმე არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა.

თავი I. არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა ერთ განზომილებიანი, მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის

I.1. არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის, ორი წერტილის შემთხვევაში

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა [8]: ვიპოვოთ $\mathrm{u}(\mathrm{x})$ ფუნქცია $[\mathrm{a},\mathrm{b}]$ სეგმენტზე

$$u(x) = \begin{cases} u^-(x), & \text{თუ } a \le x \le c \\ u^+(x), & \text{თუ } c \le x \le b, \end{cases}$$

სადაც $a < c < b,\ u^-(c) = u^+(c)$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{d^2u^-}{dx^2} = f^-(x), \text{ თუ } a < x < c, \qquad \frac{d^2u^+}{dx^2} = f^+(x), \text{ თუ } c < x < b. \tag{1.1.1}$$

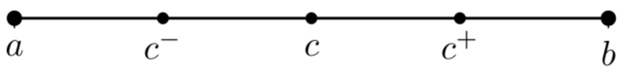
ფუნქცია $u(x)$ აკმაყოფილებს კლასიკური პირველი გვარის სასაზღვრო პირობებს:

$$u^-(a) = \varphi^-, \quad u^+(b) = \varphi^+, \tag{1.1.2}$$

ასევე ფუნქცია აკმაყოფილებს არალოკალურ საკონტაქტო პირობას c წერტილში:

$$u^-(c) = u^+(c) = u(c) = \gamma^- u^-(c^-) + \gamma^+ u^+(c^+) + \varphi_0, \tag{1.1.3}$$

$$a < c^- < c < c^+ < b,$$



ნახაზი (1)

სადაც $\gamma^- = const > 0,\ \gamma^+ = const > 0, \varphi^-, \varphi^+$ და φ_0 ცნობილი მუდმივებია.

თავდაპირველად (1.1.2) სასაზღვრო პირობებთან ერთად განვიხილოთ შემდეგი სასაზღვრო პირობები:

$$u^-(c) = u^+(c) = u(c), \tag{1.1.4}$$

სადაც $u(c)$ ჯერ-ჯერობით უცნობი სიდიდეა, და (1.1.1) განტოლებებისთვის ჩავწეროთ ამონახსნები (1.1.2), (1.1.4) სასაზღვრო პირობების გათვალისწინებით, ამასთან მოვითხოვოთ, რომ შესრულებული იყოს პირობა: $\gamma^- + \gamma^+ < 1$.

ამრიგად, $[a, c]$ შუალედზე გვაქვს ამოცანა:

$$\frac{d^2u^-}{dx^2} = f^-(x), \text{ თუ } a < x < c,$$

პირველი გვარის სასაზღვრო პირობებით:

$$u^{-}(a) = \varphi^{-}, \quad u^{-}(c) = u(c).$$

მოცემული განტოლების ინტეგრების შედეგად მივიღებთ:

$$u^{-}(x) = \int \left(\int f^{-}(x)dx \right) dx + C_1 x + C_2.$$

უკანასკნელ ტოლობაში გავითვალისწინოთ სასაზღვრო მნიშვნელობები. გვექნება:

$$u^{-}(a) = \int_a^a \left[\int_a^t f^{-}(S)dS \right] dt + C_1 a + C_2 = \varphi^{-} \tag{a}$$

$$u^{-}(c) = \int_a^c \left[\int_a^t f^{-}(S)dS \right] dt + C_1 c + C_2 = u(c) \tag{b}$$

(a) ტოლობიდან მივიღებთ :

$$C_2 = \varphi^{-} - C_1 a,$$

მიღებული ტოლობის (b)-ში ჩასმით, გვექნება:

$$u(c) = \int_a^c \left[\int_a^t f^{-}(S)dS \right] dt + C_1 c + \varphi^{-} - C_1 a.$$

აქედან მარტივად, C_1 და C_2 სიდიდეებს ექნებათ სახე:

$$C_1 = \frac{u(c) - \varphi^{-} - \int_a^c \left[\int_a^t f^{-}(S)dS \right] dt}{c - a},$$

$$C_2 = \varphi^{-} - \frac{u(c) - \varphi^{-} - \int_a^c \left[\int_a^t f^{-}(S)dS \right] dt}{c - a} a.$$

მოცემული მნიშვნელობები შევიტანოთ ინტეგრების შედეგად მიღებულ ტოლობაში:

$$u^{-}(x) = \int_a^x \left[\int_a^t f^{-}(S)dS \right] dt + \frac{u(c) - \varphi^{-} - \int_a^c \left[\int_a^t f^{-}(S)dS \right] dt}{c-a} x + \varphi^{-} - \frac{u(c) - \varphi^{-} - \int_a^c \left[\int_a^t f^{-}(S)dS \right] dt}{c-a} a,$$

გამარტივების შედეგად კი $u^{-}(x)$ მიიღებს სახეს:

$$u^{-}(x) = \frac{c - x}{c - a}\varphi^{-} + \frac{x - a}{c - a}u(c) + \frac{a - x}{c - a}\int_a^c \left[\int_a^t f^{-}(S)dS \right] dt + \int_a^x \left[\int_a^t f^{-}(S)dS \right] dt$$

ანალოგიურად ჩაიწერება $u^{+}(x)$-ის ამონახსენი.

ამრიგად, (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანისთვის ამონახსნები შემდეგი სახით ჩაიწერება:

$$u^{-}(x) = \frac{c - x}{c - a}\varphi^{-} + \frac{x - a}{c - a}u(c) + \frac{a - x}{c - a}\int_a^c \left[\int_a^t f^{-}(S)dS \right] dt + \int_a^x \left[\int_a^t f^{-}(S)dS \right] dt, \text{თუ } a \le x \le c,$$

$$\tag{1.1.5}$$

$$u^{+}(x) = \frac{x - c}{b - c}\varphi^{+} + \frac{b - x}{b - c}u(c) + \frac{c - x}{b - c}\int_c^b \left[\int_c^t f^{+}(S)dS \right] dt + \int_c^x \left[\int_c^t f^{+}(S)dS \right] dt, \text{თუ } c \le x \le b.$$

(1.1.5) ტოლობების საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ $u^{-}(c^{-})$ და $u^{+}(c^{+})$ სიდიდეები. ვისარგებლოთ (1.1.3) საკონტაქტო პირობით:

$$u(c)=\gamma^-\left[\tfrac{c-c^-}{c-a}\varphi^-+\tfrac{c^--a}{c-a}u(c)+\tfrac{a-c^-}{c-a}\int_a^c\left[\int_a^t f^-(S)dS\right]dt+\int_a^{c^-}\left[\int_a^t f^-(S)dS\right]dt\right]+ \tag{1.1.6}$$
$$+\gamma^+\left[\tfrac{c^+-c}{b-c}\varphi^++\tfrac{b-c^+}{b-c}u(c)+\tfrac{c-c^+}{b-c}\int_c^b\left[\int_c^t f^+(S)dS\right]dt+\int_c^{c^+}\left[\int_c^t f^+(S)dS\right]dt\right]+\varphi_0\,.$$

(1.1.6) ტოლობიდან მივიღებთ:

$$\left[1-\gamma^-\tfrac{c^--a}{c-a}-\gamma^+\tfrac{b-c^+}{b-c}\right]u(c)=\Phi,$$

სადაც

$$\Phi=\gamma^-\left[\tfrac{c-c^-}{c-a}\varphi^-+\tfrac{a-c^-}{c-a}\int_a^c\left[\int_a^t f^-(S)dS\right]dt+\int_a^{c^-}\left[\int_a^t f^-(S)dS\right]dt\right]+ \tag{1.1.7}$$
$$+\gamma^+\left[\tfrac{c^+-c}{b-c}\varphi^++\tfrac{c-c^+}{b-c}\int_c^b\left[\int_c^t f^+(S)dS\right]dt+\int_c^{c^+}\left[\int_c^t f^+(S)dS\right]dt\right]+\varphi_0.$$

ახლა შევაფასოთ გამოსახულება $\left[1-\gamma^-\frac{c^--a}{c-a}-\gamma^+\frac{b-c^+}{b-c}\right]$:

$$1-\gamma^-\frac{c^--a}{c-a}-\gamma^+\frac{b-c^+}{b-c}=\frac{1}{(c-a)(b-c)}[(c-a)(b-c)-\gamma^-(c^--a)(b-c)-\gamma^+(b-c^+)(c-a)]\geq$$

$$\geq\frac{1}{(c-a)(b-c)}[(c-a)(b-c)-\gamma^-(c-a)(b-c)-\gamma^+(b-c)(c-a)]=\ 1-(\gamma^-+\gamma^+)>0,$$

რადგან ჩვენი დაშვებით $\gamma^-+\gamma^+<1$.

ამრიგად, შეგვიძლია დავწეროთ:

$$u(c)=\left[1-\gamma^-\tfrac{c^--a}{c-a}-\gamma^+\tfrac{b-c^+}{b-c}\right]^{-1}\Phi,$$

სადაც Φ განსაზღვრულია (1.1.7) ტოლობით.

საბოლოოდ, (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის ანალიზური ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$u(x)=\begin{cases}\dfrac{c-x}{c-a}\varphi^-+\dfrac{x-a}{c-a}u(c)+\dfrac{a-x}{c-a}\displaystyle\int_a^c\left[\int_a^t f^-(S)dS\right]dt+\int_a^x\left[\int_a^t f^-(S)dS\right]dt, & \text{თუ } a\leq x\leq c,\\ \dfrac{x-c}{b-c}\varphi^++\dfrac{b-x}{b-c}u(c)+\dfrac{c-x}{b-c}\displaystyle\int_c^b\left[\int_c^t f^+(S)dS\right]dt+\int_c^x\left[\int_c^t f^+(S)dS\right]dt, & \text{თუ } c\leq x\leq b.\end{cases}$$

(1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის მიახლოებითი ამოხსნისათვის განვიხილოთ იტერაციული პროცესი (იხ. [9]):

$$\left[\frac{d^2u^-}{dx^2}\right]^{(k)}=f^-(x),\ \ a<x<c, \tag{1.1.8'}$$

$$\left[\frac{d^2u^+}{dx^2}\right]^{(k)}=f^+(x),\ \ c<x<b. \tag{1.1.8''}$$

(1.1.8'), (1.1.8'') აკმაყოფილებს პირველი გვარის სასაზღვრო პირობებს:

$$[u^-(a)]^{(k)}=\varphi^-,\quad [u^+(b)]^{(k)}=\varphi^+, \tag{1.1.9}$$

და არალოკალურ საკონტაქტო პირობას:

$$\left[u^{\mp}(c)\right]^{(k)}=[u(c)]^{(k)}=\gamma^-[u^-(c^-)]^{(k-1)}+\gamma^+[u^+(c^+)]^{(k-1)}+\varphi_0, \tag{1.1.10}$$

$$k = 1,2,3 \dots$$

საწყის იტერაციაზე გვაქვს:

$$[u^-(c^-)]^{(0)} = 0, \quad [u^+(c^+)]^{(0)} = 0. \tag{1.1.11}$$

აღწერილი იტერაციული პროცესი საშუალებას გვაძლევს (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანა დავიყვანოთ პირველი გვარის კლასიკური სასაზღვრო ამოცანების მიმდევრობაზე. ასეთი ამოცანების რიცხვითი ამოხსნის მეთოდები კი კარგად არის შესწავლილი.

ვთქვათ, სრულდება ყველა ის პირობა, რაც საჭიროა დიფერენციალური ამოცანის ამონახსნის არსებობისათვის, ამასთან, შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$$\gamma^- = const > 0,\ \gamma^+ = const > 0, \quad \gamma^- + \gamma^+ < 1.$$

მაშინ, სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 1. (1.1.8)-(1.1.11) იტერაციული პროცესი კრებადია (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის ამონახსნისკენ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით.

დამტკიცება:

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\left[z^{\mp}(x)\right]^{(k)} = \left[u^{\mp}(x)\right]^{(k)} - u^{\mp}(x),$$

სადაც ინდექსით მონიშნულია (1.1.8)-(1.1.11) ამოცანის ამონახსნი (k)-ურ იტერაციაზე, ხოლო $u^{\mp}(x)$ წარმოადგენს საწყისი (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის ამონახსნს.

მაშინ $z^-(x)$ და $z^+(x)$ ფუნქციებისთვის მივიღებთ შემდეგ ამოცანას:

$$\left[\frac{d^2 z^-}{dx^2}\right]^{(k)} = 0, \ \text{თუ} \ a \le x \le c, \tag{1.1.12'}$$

$$\left[\frac{d^2 z^+}{dx^2}\right]^{(k)} = 0, \ \text{თუ} \ c \le x \le b, \tag{1.1.12''}$$

სასაზღვრო პირობებით:

$$[z^-(a)]^{(k)} = 0, \quad [z^+(b)]^{(k)} = 0, \tag{1.1.13}$$

და არალოკალური საკონტაქტო პირობით:

$$\left[z^{\mp}(c)\right]^{(k)} = [z(c)]^{(k)} = \gamma^-[z^-(c^-)]^{(k-1)} + \gamma^+[z^+(c^+)]^{(k-1)}. \tag{1.1.14}$$

(1.1.14) ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ შეფასება:

$$\left|\left[z^{\mp}(c)\right]^{(k)}\right| = \left|[z(c)]^{(k)}\right| \le \gamma^-\left|[z^-(c^-)]^{(k-1)}\right| + \gamma^+\left|[z^+(c^+)]^{(k-1)}\right| \tag{1.1.14'}$$

მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ სრულდება შემდეგი უტოლობები:

$$\left|[z^-(c^-)]^{(k)}\right| \le q^-\left|[z(c)]^{(k)}\right| \quad \text{ან} \quad \left|[z^+(c^+)]^{(k)}\right| \le q^+\left|[z(c)]^{(k)}\right|,$$

სადაც $q^- = const, \quad 0 < q^- \le 1$ და $q^+ = const, \quad 0 < q^- \le 1,$

ამასთან ერთად, თუ გამოვიყენებთ (1.1.14’) უტოლობას, მაშინ გვექნება:

$$\left|\left[z^{\mp}(c)\right]^{(k)}\right| = \left|[z(c)]^{(k)}\right| \le \gamma^- q^- \left|[z^-(c)]^{(k-1)}\right| + \gamma^+ q^+ \left|[z^+(c)]^{(k-1)}\right|,$$

საიდანაც მივიღებთ რომ:

$$\left|[z(c)]^{(k)}\right| \le [\gamma^- q^- + \gamma^+ q^+]\left|[z(c)]^{(k-1)}\right|.$$

აღვნიშნოთ:

$$Q = \gamma^- q^- + \gamma^+ q^+.$$

მაშინ, უკანასკნელი უტოლობა გადაიწერება შემდეგნაირად:

$$\left|[z(c)]^{(k)}\right| \le Q\left|[z(c)]^{(k-1)}\right|.$$

აქედან გამომდინარეობს:

$$\left|[z(c)]^{(k)}\right| \le Q\left|[z(c)]^{(k-1)}\right| \le Q^2\left|[z(c)]^{(k-2)}\right| \le \cdots \le Q^k\left|[z(c)]^{(0)}\right|.$$

თუ გავითვალისწინებთ პირობას $\gamma^- + \gamma^+ < 1$, მაშინ:

$$0 < \gamma^- q^- + \gamma^+ q^+ = Q \le \gamma^- + \gamma^+ < 1$$

უკანასკნელი უტოლობიდან ვასკვნით, რომ

$$\lim_{k\to\infty} [z(c)]^{(k)} \to 0,$$

საიდანაც მაქსიმუმის პრინციპის [11] ძალით მივიღებთ, რომ ამოცანის განსაზღვრის არეზე სამართლიანია ტოლობები:

$$\left|[u^-(x)]^{(k)} - u^-(x)\right| = O(Q^k),$$

$$\left|[u^+(x)]^{(k)} - u^+(x)\right| = O(Q^k).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

I.2 რიცხვითი მაგალითი (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანისათვის

განვიხილოთ (1.1.1)-(1.1.3) ამოცანის მაგალითი და ჩავატაროთ მისთვის რიცხვითი გათვლები.

ვიპოვოთ [0,1] სეგმენტზე განსაზღვრული $u(x)$ ფუნქცია,

$$u(x) = \begin{cases} u^-(x), & \text{თუ } 0 \le x \le 0.5, \\ u^+(x), & \text{თუ } 0.5 \le x \le 1, \end{cases}$$

სადაც $u^-(0.5) = u^+(0.5)$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{d^2u^-}{dx^2} = 2x^2, \quad \text{თუ } 0 < x < 0.5, \tag{1.2.1’}$$

$$\frac{d^2u^+}{dx^2} = 2x + 5, \quad \text{თუ } 0.5 < x < 1, \tag{1.2.1’’}$$

პირველი გვარის კლასიკურ სასაზღვრო პირობებს:

$$u^-(0)=0,\;\; u^+(1)=0, \tag{1.2.2}$$

და არალოკალურ საკონტაქტო პირობას:

$$\left[u^{\mp}(0.5)\right]=[u(0.5)]=0.25[u^-(0.25)]+0.25[u^+(0.75)]+\tfrac{3775}{6144}. \tag{1.2.3}$$

(1.2.1)-(1.2.3) ამოცანისთვის განვიხილოთ შემდეგი იტერაციული პროცესი:

$$\left[\frac{d^2u^-}{dx^2}\right]^{(k)}=2x^2, \qquad 0<x<0.5, \tag{1.2.4'}$$

$$\left[\frac{d^2u^+}{dx^2}\right]^{(k)}=2x+5,\;\; 0.5<x<1, \tag{1.2.4''}$$

$$k=0,1,2,3\,...$$

(1.2.4') (1.2.4'') აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს:

$$[u^-(0)]^{(k)}=0, \quad [u^+(1)]^{(k)}=0, \tag{1.2.5}$$

და არალოკალურ საკონტაქტო პირობას:

$$\left[u^{\mp}(0.5)\right]^{(k)}=[u(0.5)]^{(k)}=0.25[u^-(0.25)]^{(k-1)}+0.25[u^+(0.75)]^{(k-1)}+\tfrac{3775}{6144}, \tag{1.2.6}$$

$(k\;=\;1,2,3\,...)$. საწყის იტერაციაზე გვაქვს:

$$[u^-(0.25)]^{(0)}=0, \quad [u^+(0.75)]^{(0)}=0. \tag{1.2.7}$$

(1.2.4)-(1.2.7) იტერაციული პროცესით, ყოველი k-სთვის, მოცემული ამოცანა დაგვყავს ორი კლასიკური სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნამდე. პირველია

$$\frac{d^2u^-}{dx^2}=2x^2, \quad \text{თუ} \quad 0\le x\le 0.5,$$

სასაზღვრო პირობებით:

$$u^-(0)=0\,, \quad u^-(0.5)=[u(0.5)]^k,$$

და მეორეა

$$\frac{d^2u^+}{dx^2}=2x+5, \quad \text{თუ} \quad 0.5\le x\le 1,$$

სასაზღვრო პირობებით:

$$u^+(1)=0\,, \quad u^+(0.5)=[u(0.5)]^k.$$

არალოკალურ საკონტაქტო პირობას საწყის იტერაციაზე ექნება სახე

$$\left[u^{\mp}(0.5)\right]^0=\tfrac{3775}{6144}.$$

მოცემული ამოცანების ამოსახსნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ მეორე რიგის სიზუსტის მქონე სასრულ სხვაობიანი სქემა:

$$u''(x_i)\approx\frac{y_{i+1}-2y_i+y_{i-1}}{h^2}\,.$$

გამოთვლების შედეგები შეგვიძლია შევადაროთ ამოცანის ზუსტ ამონახსნს:

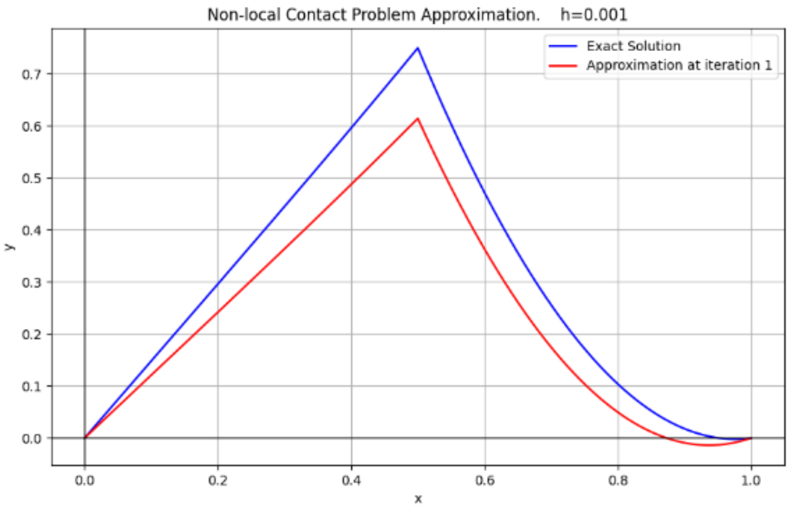
$$u(x) = \begin{cases} \frac{1}{48}(8x^4 + 71x), & 0 \le x \le 0.5, \\ \frac{1}{6}(2x^3 + 15x^2 - 35x + 18), & 0.5 \le x \le 1. \end{cases}$$

ქვემოთ მოყვანილი გამოთვლები შესრულებულია Python პროგრამირების ენაში:

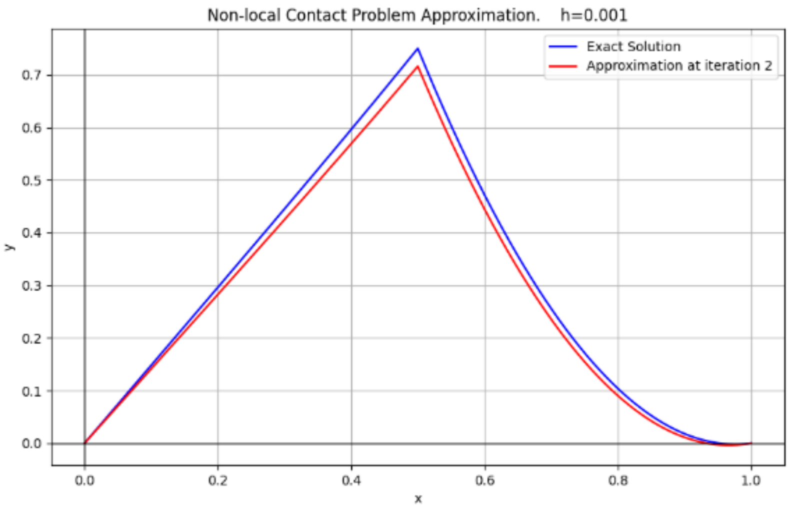
იტერაცია	აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, h =0.01	აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, h=0.001	აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, h=0.0001
1	1.36E-01	1.36E-01	1.36E-01
2	3.39E-02	3.39E-02	3.39E-02
3	8.47E-03	8.47E-03	8.47E-03
4	2.12E-03	2.12E-03	2.12E-03
5	5.29E-04	5.30E-04	5.30E-04
6	1.32E-04	1.32E-04	1.32E-04
7	3.28E-05	3.31E-05	3.31E-05
8	7.93E-06	8.27E-06	8.28E-06
9	1.72E-06	2.07E-06	2.07E-06
10	9.58E-07	5.14E-07	5.17E-07
11	1.15E-06	1.26E-07	1.29E-07
12	1.21E-06	2.89E-08	3.23E-08
13	1.22E-06	8.24E-09	8.05E-09
14	1.22E-06	1.12E-08	1.98E-09
15	1.22E-06	1.20E-08	4.70E-10
16	1.22E-06	1.22E-08	9.07E-11
17	1.22E-06	1.22E-08	1.07E-10
18	1.22E-06	1.22E-08	1.20E-10
მინიმალური ცდომილება	იტერაცია 10: 9.58E-07	იტერაცია 13: 8.24E-09	იტერაცია 16: 9.07E-11

ცხრილი 1

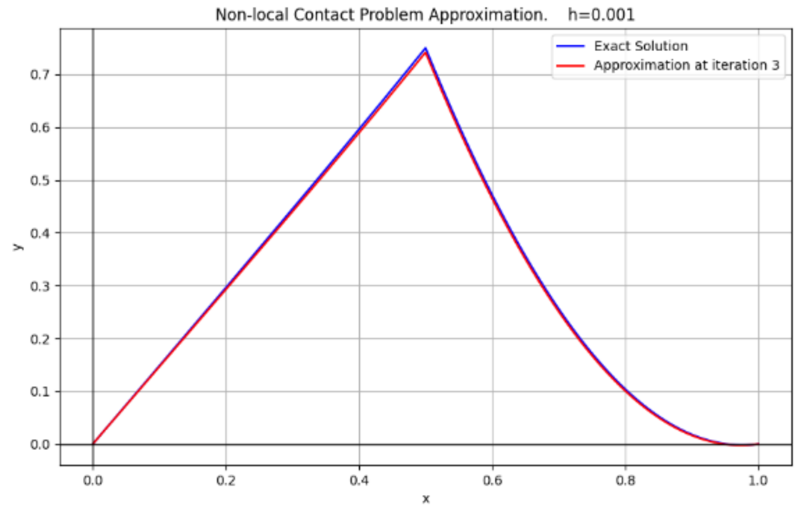
ქვემოთ მოყვანილ გრაფიკებზე მოცემულია ამოცანის ზუსტი ამონახსენი და შესაბამისი რიცხვითი მიახლოება, იტერაციის მიხედვით.



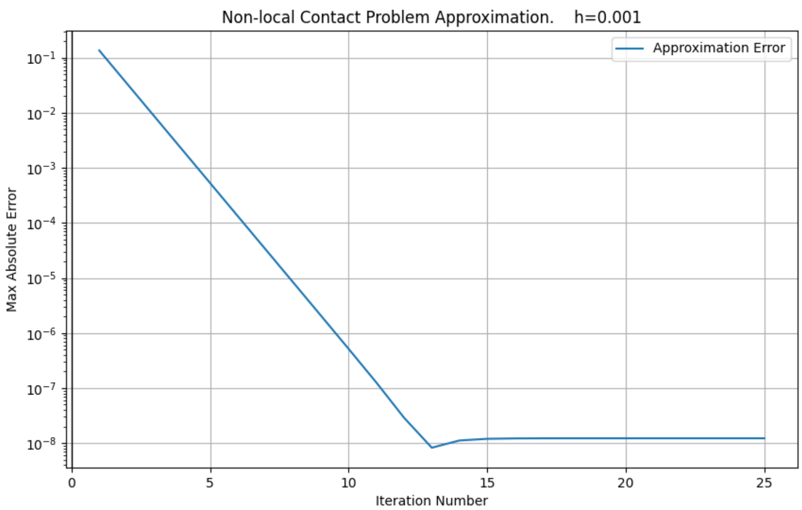
გრაფიკი (1): იტერაცია N1, h=0.001



გრაფიკი (2): იტერაცია N2, h=0.001



გრაფიკი (3): იტერაცია N3, h=0.001



გრაფიკი (4): ცდომილების დამოკიდებულება იტერაციის ნომერზე

I.3 რიცხვითი ექსპერიმენტი (1.2.1)-(1.2.3) ამოცანისთვის

რიცხვით ექსპერიმენტში განხილულია შემთხვევები γ^- და γ^+ სხვადასხვა მნიშვნელობებისთვის, მათ შორის, როდესაც $\gamma^- + \gamma^+ = 1$. ასევე ინტერესისთვის ჩატარდა ექსპერიმენტები, სადაც $\gamma^- + \gamma^+ > 1$.

ექსპერიმენტში აღებულია $h = 0.01$ შემთხვევა.

ექსპერიმენტი 1.

I, II და III ცხრილში განხილულია შემთხვევები, როდესაც:

1) $\gamma^- = 0.1$, $\gamma^+ = 0.1$ და $h = 0.01$
2) $\gamma^- = 0.01$, $\gamma^+ = 0.05$ და $h = 0.01$
3) $\gamma^- = 0.01$, $\gamma^+ = 0.01$ და $h = 0.01$

იტერაცია	აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, $\boldsymbol{h = 0.01}$ $\boldsymbol{\gamma^- = 0.1 , \gamma^+ = 0.1}$		იტერაცია	აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, $\boldsymbol{h = 0.01}$ $\boldsymbol{\gamma^- = 0.01, \gamma^+ = 0.05}$
1	5.42E-02		1	1.23E-02
2	5.42E-03		2	3.69E-04
3	5.42E-04		3	1.11E-05
4	5.41E-05		4	8.87E-07
5	5.31E-06		5	1.04E-06
6	8.39E-07		6	1.05E-06
7	1.07E-06		7	1.05E-06
8	1.10E-06		8	1.05E-06
9	1.10E-06		9	1.05E-06
მინიმალური ცდომილება	იტერაცია 6: 8.39E-07		**მინიმალური ცდომილება**	იტერაცია 4: 8.87E-07

ცხრილი 2 *ცხრილი 3*

იტერაცია	აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, $\boldsymbol{h = 0.01,\ \gamma^- = 0.01, \gamma^+ = 0.01}$
1	5.42E-03
2	5.42E-05
3	7.93E-07
4	1.04E-06
5	1.05E-06
6	1.05E-06
7	1.05E-06
მინიმალური ცდომილება	იტერაცია 3: 7.93E-07

ცხრილი 4

ექსპერიმენტი 2.

ამ ექსპერიმენტში გაზრდილია γ^- და γ^+.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $\gamma^- = 0.5$, $\gamma^+ = 0.3$ და $h = 0.01$

იტერაცია	აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, $\boldsymbol{h = 0.01,\ \ \gamma^- = 0.5 , \gamma^+ = 0.3}$
1	2.37E-01
2	9.47E-02
10	6.12E-05
11	2.40E-05
12	9.06E-06
13	3.10E-06
14	7.21E-07
15	1.16E-06
19	1.51E-06
20	1.52E-06
მინიმალური ცდომილება	იტერაცია 14: 7.21E-07

ცხრილი 5

ექსპერიმენტი 3.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევები, როცა $\gamma^- + \gamma^+ = 1$

1) როცა $\gamma^- = 0.6$, $\gamma^+ = 0.4$, $h = 0.01$ და 2) როცა $\gamma^- = \gamma^+ = 0.5$, $h = 0.01$

იტერაცია	აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, $\boldsymbol{h = 0.01}$ $\boldsymbol{\gamma^- = 0.6 , \gamma^+ = 0.4}$
1	2.91E-01
9	1.14E-03
17	3.19E-06
18	9.70E-07
19	1.11E-06
30	1.76E-06
მინიმალური ცდომილება	იტერაცია 18: 9.70E-07

ცხრილი 6

იტერაცია	აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, $\boldsymbol{h = 0.01}$, $\boldsymbol{\gamma^- = \gamma^+ = 0.5}$
1	2.71E-01
9	1.06E-03
17	3.10E-06
18	1.03E-06
19	1.05E-06
30	1.63E-06
მინიმალური ცდომილება	იტერაცია 18: 1.03E-06

ცხრილი 7

ექსპერიმენტი 4:

განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $1 < \gamma^- + \gamma^+ < 2$

1. γ^-=0.6 $\gamma^+ = 0.7, \mathrm{h} = 0.01$
2. γ^-=0.9 $\gamma^+ = 0.9, \mathrm{h} = 0.01$

იტერაცია	აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, $\boldsymbol{h = 0.01,}$ $\boldsymbol{\gamma^- = 0.6 , \gamma^+ = 0.7}$
1	3.43E-01
2	2.23E-01
9	1.09E-02
23	2.44E-05
28	1.26E-06
29	9.47E-07
35	2.02E-06
მინიმალური ცდომილება	იტერაცია 29: 9.47E-07

ცხრილი 8

იტერაცია	აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, $\boldsymbol{h = 0.01}$, $\boldsymbol{\gamma^- = 0.9 , \gamma^+ = 0.9}$
1	4.88E-01
29	2.55E-02
59	1.07E-03
60	9.65E-04
81	9.73E-05
104	1.00E-06
120	7.62E-06
მინიმალური ცდომილება	იტერაცია 104: 1.00E-06

ცხრილი 9

ექსპერიმენტი 5.

განვიხილოთ შემთხვევა როცა $\gamma^- + \gamma^+ = 2.$

ვთქვათ γ^-=0.8, $\gamma^+ = 1.2.$

იტერაცია	**აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, $h = 0.01$, $\gamma^- = 0.8$, $\gamma^+ = 1.2$**
1	0.502604167
10000	0.494271667
მინიმალური ცდომილება	იტერაცია 10000: 0.494271667

ცხრილი 10

დასკვნა. ჩატარებული ექსპერიმენტებით დადგინდა, რომ $(\gamma^- + \gamma^+)$ ჯამის 0-თან მიახლოებით, საკმარისად კარგი ცდომილების მისაღებად გვჭირდება ნაკლები იტერაცია, ხოლო $(\gamma^- + \gamma^+)$ ჯამის 1-ისკენ მიახლოებით იტერაციათა რიცხვი იზრდება, მაგრამ იტერაციული მეთოდის სიზუსტე იგივე რჩება.

იმ შემთხვევაში, როცა $\gamma^- + \gamma^+ = 1$, მოცემული მაგალითის შემთხვევაში მოთხოვნილი სიზუსტის მისაღწევად საჭირო იტერაციათა რაოდენობა მისაღებია და ამონახსენის გამოთვლა არ წარმოადგენს სირთულეს.

იგივე შეფასება ვრცელდება შემთხვევაზე, როცა $1 < \gamma^- + \gamma^+ < 2.$ გასათვალისწინებელია, რომ როდესაც $(\gamma^- + \gamma^+)$ ჯამი ძალიან ახლოს არის 2-თან, იტერაციათა რიცხვი მკვეთრად იზრდება, რამაც უფრო მცირე h-ის შემთხვევაში შესაძლოა გამოთვლების გართულება გამოიწვიოს. ხოლო იმ შემთხვევაში როდესაც, $\gamma^- + \gamma^+ = 2$, მაშინ 10000 იტერაციაც კი არ აღმოჩნდა საკმარისი h^2 რიგის სიზუსტის მისაღებად.

I.4 არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის, მრავალი წერტილის შემთხვევაში

განვიხილოთ შემდეგი ამოცანა: ვიპოვოთ უწყვეტი $u(x)$ ფუნქცია $[a,b]$ სეგმენტზე,

$$u(x) = \begin{cases} u^-(x), & \text{თუ } a \le x \le c \\ u^+(x), & \text{თუ } c \le x \le b \end{cases}$$

სადაც $a < c < b$, $u^-(c) = u^+(c)$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{d^2u^-}{dx^2} = f^-(x), \text{ თუ } a < x < c, \qquad \frac{d^2u^+}{dx^2} = f^+(x), \text{ თუ } c < x < b\,. \qquad (1.4.1)$$

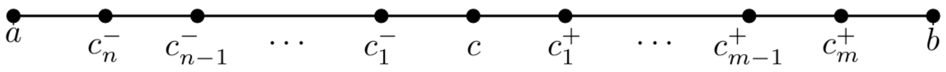
$u(x)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს:

$$u^-(a) = \varphi^-, \quad u^+(b) = \varphi^+ \,, \tag{1.4.2}$$

ასევე არალოკალურ საკონტაქტო პირობას:

$$u^-(c) = u^+(c) = u(c) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^- u^-(c_i^-) + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j^+ u^+(c_j^+) + \varphi_0, \tag{1.4.3}$$

$$a < c_i^- < c < c_j^+ < b,$$



ნახაზი (2)

სადაც $\gamma_i^- = const > 0$, $\gamma_j^+ = const > 0$, φ^- , φ^+ და φ_0 ცნობილი მოცემული სიდიდეებია.

მოვითხოვოთ, რომ γ_i^- და γ_j^+ აკმაყოფილებდნენ უტოლობას: $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^- + \sum_{i=1}^{m} \gamma_j^+ < 1$.

თავდაპირველად, (1.4.2) სასაზღვრო პირობებთან ერთად განვიხილოთ პირობა:

$$u^-(c) = u^+(c) = u(c) \,, \tag{1.4.4}$$

სადაც $u(c)$ ჯერ-ჯერობით უცნობი სიდიდეა.

I.1-ში აღწერილი მიდგომის მსგავსად, (1.4.1) განტოლებებისთვის (1.4.2), (1.4.4) სასაზღვრო პირობებით ამონახსნს ექნება სახე:

$$u^-(x) = \frac{c-x}{c-a}\varphi^- + \frac{x-a}{c-a}u(c) + \frac{a-x}{c-a}\int_a^c \left[\int_a^t f^-(S)dS\right]dt + \int_a^x \left[\int_a^t f^-(S)dS\right]dt, \text{ თუ } a \le x \le c, \tag{1.4.5}$$

$$u^+(x) = \frac{x-c}{b-c}\varphi^+ + \frac{b-x}{b-c}u(c) + \frac{c-x}{b-c}\int_c^b \left[\int_c^t f^+(S)dS\right]dt + \int_c^x \left[\int_c^t f^+(S)dS\right]dt, \text{ თუ } c \le x \le b. \tag{1.4.6}$$

(1.4.5)-(1.4.6) ტოლობების საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვროთ $u^-(c_i^-)$ და $u^+(c_j^+)$ სიდიდეები. თუ ვისარგებლებთ (1.4.3) საკონტაქტო პირობით მარტივად მივიღებთ რომ:

$$u(c) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^- \left[\frac{c-c_i^-}{c-a}\varphi^- + \frac{c_i^- - a}{c-a}u(c) + \frac{a-c_i^-}{c-a}\int_a^c \left[\int_a^t f^-(S)dS\right]dt + \int_a^{c_i^-} \left[\int_a^t f^-(S)dS\right]dt\right] + \tag{1.4.7}$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \gamma_j^+ \left[\frac{c_j^+ - c}{b-c}\varphi^+ + \frac{b-c_j^+}{b-c}u(c) + \frac{c-c_j^+}{b-c}\int_c^b \left[\int_c^t f^+(S)dS\right]dt + \int_c^{c_j^+} \left[\int_c^t f^+(S)dS\right]dt\right] + \varphi_0,$$

საიდანაც შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\left[1 - \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^- \frac{c_i^- - a}{c-a} - \sum_{j=1}^{m} \gamma_j^+ \frac{b-c_j^+}{b-c}\right] u(c) = \Phi, \tag{1.4.8}$$

სადაც

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^- \left[\frac{c-c_i^-}{c-a}\varphi^- + \frac{a-c_i^-}{c-a}\int_a^c \left[\int_a^t f^-(S)dS\right]dt + \int_a^{c_i^-} \left[\int_a^t f^-(S)dS\right]dt\right] +$$

$$+\sum_{j=1}^{m} \gamma_j^+ \left[\frac{c_j^+ - c}{b-c}\varphi^+ + \frac{c-c_j^+}{b-c}\int_c^b \left[\int_c^t f^+(S)dS\right]dt + \int_c^{c_j^+} \left[\int_c^t f^+(S)dS\right]dt\right] + \varphi_0. \tag{1.4.9}$$

შევაფასოთ გამოსახულება $\left[1-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^-\frac{c_i^- - a}{c-a}-\sum_{j=1}^{m}\gamma_j^+\frac{b-c_j^+}{b-c}\right]$:

$$1-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^-\frac{c_i^- - a}{c-a}-\sum_{j=1}^{m}\gamma_j^+\frac{b-c_j^+}{b-c}=\frac{1}{(c-a)(b-c)}\left[(c-a)(b-c)-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^-(c_i^- - a)(b-c)-\right.$$
$$\left.-\sum_{j=1}^{m}\gamma_j^+\left(b-c_j^+\right)(c-a)\right]>\frac{1}{(c-a)(b-c)}\left[(c-a)(b-c)-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^-(c-a)(b-c)-\right.$$
$$\left.-\sum_{j=1}^{m}\gamma_j^+(b-c)(c-a)\right]=1-\left(\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^- + \sum_{i=1}^{m}\gamma_j^+\right)>0,$$

რადგან ჩვენი დაშვებით $\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^- + \sum_{i=1}^{m}\gamma_j^+ < 1$.

ამრიგად მივიღებთ:

$$u(c) = \left[1-\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^-\frac{c_i^- - a}{c-a}-\sum_{j=1}^{m}\gamma_j^+\frac{b-c_j^+}{b-c}\right]^{-1}\Phi, \tag{1.4.10}$$

სადაც Φ განსაზღვრულია(1.4.9) ტოლობით.

ამრიგად (1.4.1)-(1.4.3) ამოცანის ანალიზური ამონახსნი ჩაიწერება შემდეგი სახით:

$$u(x)=\begin{cases}\dfrac{c-x}{c-a}\varphi^- + \dfrac{x-a}{c-a}u(c)+\dfrac{a-x}{c-a}\displaystyle\int_a^c\left[\int_a^t f^-(S)dS\right]dt+\int_a^x\left[\int_a^t f^-(S)dS\right]dt, & \text{თუ } a\le x\le c,\\ \dfrac{x-c}{b-c}\varphi^+ + \dfrac{b-x}{b-c}u(c)+\dfrac{c-x}{b-c}\displaystyle\int_c^b\left[\int_c^t f^+(S)dS\right]dt+\int_c^x\left[\int_c^t f^+(S)dS\right]dt, & \text{თუ } c\le x\le b,\end{cases}$$

სადაც $u(c)$ მუდმივი განსაზღვრულია (1.4.10) ტოლობით.

ახლა განვიხილოთ იტერაციული პროცესი (1.4.1)-(1.4.3) ამოცანისთვის:

$$\left[\frac{d^2u^-}{dx^2}\right]^{(k)} = f^-(x),\ \ a<x<c\ , \tag{1.4.11'}$$

$$\left[\frac{d^2u^+}{dx^2}\right]^{(k)} = f^+(x),\ \ c<x<b. \tag{1.4.11''}$$

$$k=0,1,2,\dots$$

(1.4.11’), (1.4.11’’) აკმაყოფილებს პირველი გვარის სასაზღვრო პირობებს:

$$[u^-(a)]^{(k)}=\varphi^-,\qquad [u^+(b)]^{(k)}=\varphi^+ \tag{1.4.12}$$

და არალოკალურ საკონტაქტო პირობას:

$$\left[u^{\mp}(c)\right]^{(k)}=[u(c)]^{(k)}=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i^-\,[u^-(c_i^-)]^{(k-1)}+\sum_{j=1}^{m}\gamma_j^+\left[u^+\left(c_j^+\right)\right]^{(k-1)}+\varphi_0, \tag{1.4.13}$$

სადაც $k=1,2,3\dots$. საწყის მიახლოებად შეგვიძლია ავიღოთ:

$$[u^-(c_i^-)]^{(0)}=0,\ \ \left[u^+\left(c_j^+\right)\right]^{(0)}=0,\quad i=\overline{(1,n)}\text{ და } j=\overline{(1,m)}. \tag{1.4.14}$$

საწყის იტერაციაზე აღებული მნიშვნელობების ჩასმით (1.4.11)-(1.4.15) იტერაციული პროცესის საკონტაქტო (1.4.13) პირობაში შეგვიძლია გამოვთვალოთ u ფუნქციის მნიშვნელობა c წერტილში. ამგვარად ჩვენ მივიღებთ ორ კლასიკურ სასაზღვრო ამოცანას მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისათვის.

ვთქვათ, სრულდება ყველა ის პირობა, რაც საჭიროა საწყისი ამოცანის ამოხსნის არსებობისათვის. ამასთან, შესრულებულია შემდეგი პირობა:

$\gamma_i^- = const > 0,\ \gamma_j^+ = const > 0,$ სადაც $i = \overline{(1,n)}\,,\ j = \overline{(1,m)}$ და $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^- + \sum_{i=1}^{m} \gamma_j^+ < 1.$

მაშინ, (1.4.11)-(1.4.14) იტერაციული პროცესისთვის სამართლიანია თეორემა.

თეორემა 2. (1.4.11)-(1.4.14) იტერაციული პროცესი კრებადია (1.4.1)-(1.4.3) ამოცანის ამონახსნისაკენ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით.

დამტკიცება:

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\left[z^{\mp}(x)\right]^{(k)} = \left[u^{\mp}(x)\right]^{(k)} - u^{\mp}(x),$$

სადაც ინდექსით მონიშნულია (1.4.11)-(1.4.14) ამოცანის ამონახსენი, ხოლო $u^{\mp}(x)$ წარმოადგენს (1.4.1)-(1.4.3) ამოცანის ამონახსნს.

მაშინ $z^-(x)$ და $z^+(x)$ ფუნქციებისთვის მივიღებთ შემდეგ ამოცანას:

$$\left[\frac{d^2 z^-}{dx^2}\right]^{(k)} = 0, \quad \text{თუ } a \le x \le c, \tag{1.4.15'}$$

$$\left[\frac{d^2 z^+}{dx^2}\right]^{(k)} = 0, \quad \text{თუ } c \le x \le b, \tag{1.4.15''}$$

სასაზღვრო პირობებით:

$$[z^-(a)]^{(k)} = 0, \quad [z^+(b)]^{(k)} = 0, \tag{1.4.16}$$

და არალოკალური საკონტაქტო პირობით:

$$\left[z^{\mp}(c)\right]^{(k)} = [z(c)]^{(k)} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^- \left[z^-(c_i^-)\right]^{(k-1)} + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j^+ \left[z^+\left(c_j^+\right)\right]^{(k-1)}. \tag{1.4.17}$$

(1.4.17) ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ შეფასება:

$$\left|\left[z^{\mp}(c)\right]^{(k)}\right| = \left|[z(c)]^{(k)}\right| \le \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^- \left|\left[z^-(c_i^-)\right]^{(k-1)}\right| + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j^+ \left|\left[z^+\left(c_j^+\right)\right]^{(k-1)}\right|, \tag{1.4.17'}$$

აქედან მარტივად შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი უტოლობები:

$$\left|[z^-(c_i^-)]^{(k)}\right| \le q^-\left|[z(c)]^{(k)}\right| \quad \text{ან} \quad \left|[z^+(c_j^+)]^{(k)}\right| \le q^+\left|[z(c)]^{(k)}\right|,$$

სადაც $i = \overline{(1,n)},\ j = \overline{(1,m)},\ q^- = const,\ \ 0 < q^- \le 1$ და $q^+ = const,\ \ 0 < q^- \le 1.$

ამასთან, თუ გამოვიყენებთ (1.4.17') უტოლობას, მაშინ გვექნება:

$$\left|\left[z^{\mp}(c)\right]^{(k)}\right| = \left|[z(c)]^{(k)}\right| \le q^- \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^- \left|[z^-(c)]^{(k-1)}\right| + q^+ \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^+ \left|[z^+(c)]^{(k-1)}\right|,$$

საიდანაც ვიღებთ რომ:

$$\left|[z(c)]^{(k)}\right| \le Q\left|[z(c)]^{(k-1)}\right|,$$

სადაც

$$Q = q^- \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^- + q^+ \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^+.$$

უკანასკნელი უტოლობიდან შეგვიძლია დავაკსვნათ:

$$\left|[z(c)]^{(k)}\right| \le Q\left|[z(c)]^{(k-1)}\right| \le Q^2\left|[z(c)]^{(k-2)}\right| \le \cdots \le Q^k\left|[z(c)]^{(0)}\right|.$$

თუ გავითვალისწინებთ პირობას $\sum_{i=1}^{n} \gamma_i^- + \sum_{i=1}^{m} \gamma_j^+ < 1$, მაშინ:

$$0 < q^- \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^- + q^+ \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^+ = Q \le \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^- + \sum_{i=1}^{m} \gamma_j^+ < 1.$$

აქედან, კი გამომდინარეობს რომ:

$$\lim_{k\to\infty} [z(c)]^{(k)} \to 0.$$

მაქსიმუმის პრინციპის [11] ძალით მივიღებთ:

$$\left|[u^-(x)]^{(k)} - u^-(x)\right| = O(Q^k),$$

საწყისი შუალედის მარცხენა ნახევარარეში, და

$$\left|[u^+(x)]^{(k)} - u^+(x)\right| = O(Q^k),$$

მარჯვენა ნახევარარეში.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

I.5 რიცხვითი მაგალითი (1.4.1)-(1.4.3) ამოცანისთვის

ვიპოვოთ უწყვეტი $u(x)$ ფუნქცია $[0, 1]$ სეგმენტზე,

$$u(x) = \begin{cases} u^-(x), & \text{თუ } 0 \le x \le 0.5, \\ u^+(x), & \text{თუ } 0.5 \le x \le 1, \end{cases}$$

სადაც $u^-(0.5) = u^+(0.5)$, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ განტოლებებს:

$$\frac{d^2u^-}{dx^2} = 12x + 6, \quad \text{თუ } 0 < x < 0.5,$$

$$\frac{d^2u^+}{dx^2} = 3x + 2, \quad \text{თუ } 0.5 < x < 1.$$

სასაზღვრო პირობებს:

$$u^-(0) = 0, \; u^+(1) = 0,$$

და არალოკალურ საკონტაქტო პირობას:

$$\left[u^{\mp}(0.5)\right] = [u(0.5)] = 0.1[u^-(0.2)] + 0.1[u^-(0.3)] + 0.1[u^-(0.4)] + 0.1[u^+(0.6)] +$$

$$+0.1[u^+(0.7)] + 0.1[u^+(0.8)] + 0.1[u^+(0.9)] + 0.7357.$$

აღნიშნული ამოცანის ამოსახსნელად განვიხილოთ იტერაციული პროცესი:

$$\left[\frac{d^2u^-}{dx^2}\right]^{(k)} = 12x + 6, \quad 0 < x < 0.5, \tag{1.5.1'}$$

$$\left[\frac{d^2u^+}{dx^2}\right]^{(k)} = 3x + 2, \quad 0.5 < x < 1, \tag{1.5.1''}$$

$$k = 1, 2, 3 \ldots$$

შემდეგი სასაზღვრო პირობებით:

$$[u^-(0)]^{(k)} = 0, \quad [u^+(1)]^{(k)} = 0, \tag{1.5.2}$$

და არალოკალური საკონტაქტო პირობით:

$$\begin{gathered}\left[u^{\mp}(0.5)\right]^{(k)} = [u(0.5)]^{(k)} = 0.1\,[u^-(0.2)]^{(k-1)} + 0.1\,[u^-(0.3)]^{(k-1)} + \\ +0.1[u^-(0.4)]^{(k-1)} + 0.1[u^+(0.6)]^{(k-1)} + 0.1[u^+(0.7)]^{(k-1)} + \\ +0.1[u^+(0.8)]^{(k-1)} + 0.1[u^+(0.9)]^{(k-1)} + 0.7357\end{gathered} \tag{1.5.3}$$

($k = 1, 2, 3 \ldots$). საწყის იტერაციაზე კი გვექნება:

$$[u(0.5)]^{(k)} = 0.7357. \tag{1.5.4}$$

(1.5.1)-(1.5.4) იტერაციული პროცესით მოცემული ამოცანა დაგვყავს ორ პირველ სასაზღვრო ამოცანამდე. პირველი ამოცანაა:

$$\frac{d^2u^-}{dx^2} = 12x + 6, \quad \text{თუ} \quad 0 \le x \le 0.5,$$

სასაზღვრო პირობებით:

$$u^-(0) = 0\,, \quad u^-(0.5) = [u(0.5)]^k,$$

და მეორე ამოცანაა:

$$\frac{d^2u^+}{dx^2} = 3x + 2, \quad \text{თუ} \quad 0.5 \le x \le 1,$$

სასაზღვრო პირობებით:

$$u^+(0.5) = [u(0.5)]^k, \quad u^+(1) = 0.$$

ამ კლასიკური სასაზღვრო ამოცანების ამოსახსნელად შეგვიძლია გამოვიყენოთ მეორე რიგის სიზუსტის მქონე სასრულ სხვაობიანი მეთოდი:

$$u''(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2},$$

და გამოთვლების შედეგები შეგვიძლია შევადაროთ ამოცანის ზუსტ ამონახსნს:

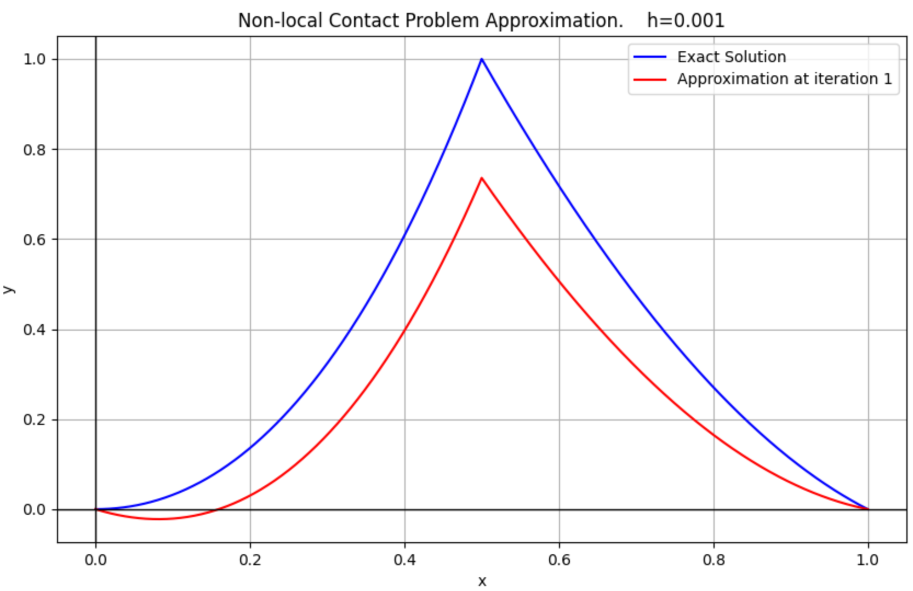
$$u(x) = \begin{cases} 2x^3 + 3x^2, & 0 \le x \le 0.5, \\ 0.5x^3 + x^2 - 4.375x + 2.875, & 0.5 \le x \le 1. \end{cases}$$

ქვემოთ მოყვანილი გამოთვლები შესრულებია Python პროგრამირების ენაში:

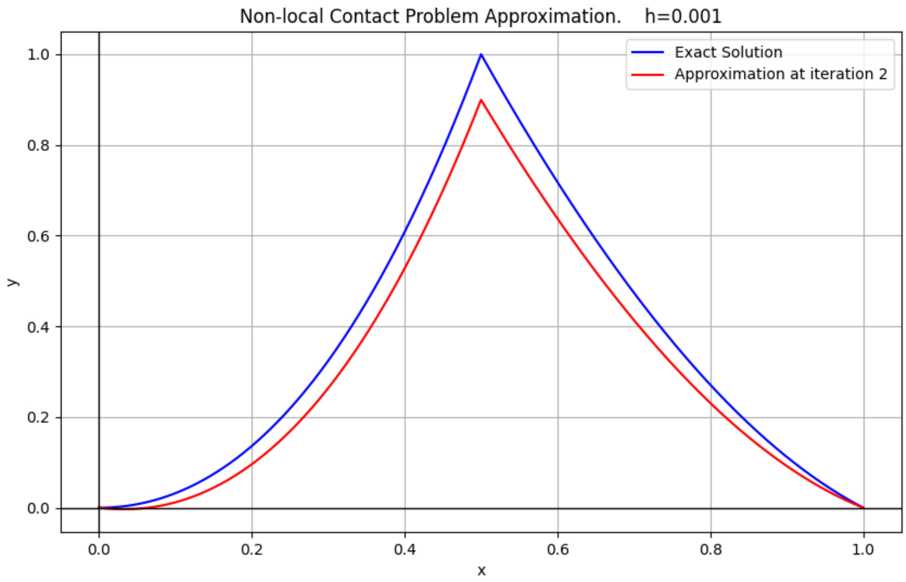
იტერაცია	აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, $h = 0.01$	აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, $h = 0.001$	აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, $h = 0.0001$
1	2.64E-01	2.64E-01	2.64E-01
10	4.37E-05	4.37E-05	4.37E-05
20	2.74E-09	2.74E-09	2.74E-09
27	3.14E-12	3.12E-12	2.32E-12
32	2.71E-14	3.00E-14	3.15E-12
37	4.61E-15	4.57E-14	3.16E-12
მინიმალური ცდომილება	იტერაცია 37: 4.61E-15	იტერაცია 32: 3.00E-14	იტერაცია 27: 2.32E-12

ცხრილი 11

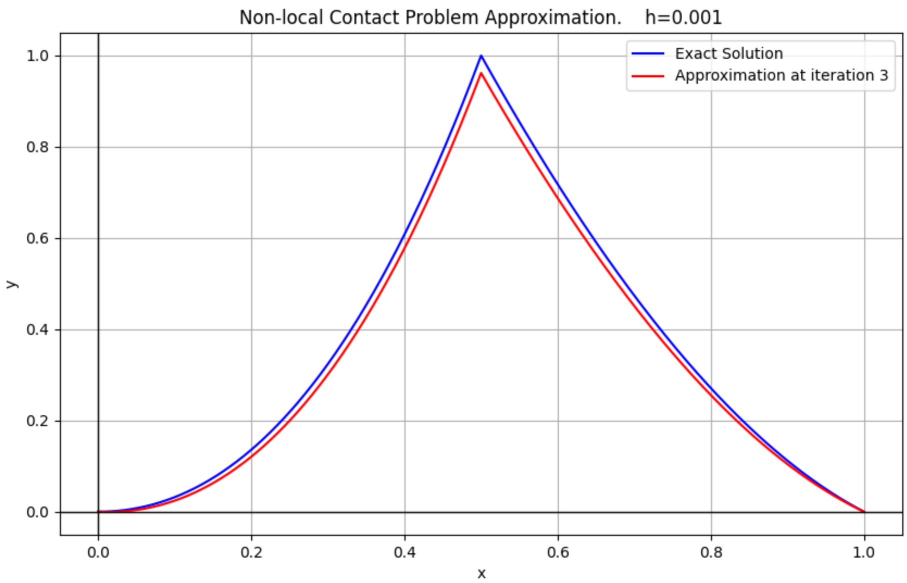
ქვემოთ მოყვანილ გრაფიკებზე შეგიძლიათ იხილოთ ამოცანის ზუსტი ამონახსენი და რიცხვითი მიახლოება იტერაციის მიხედვით.



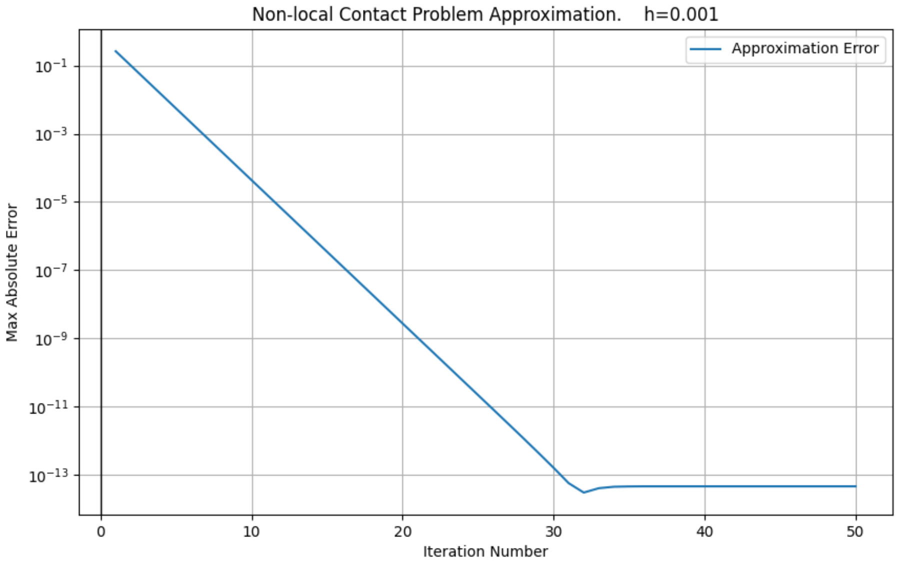
გრაფიკი (5): იტერაცია N1, h=0.001



გრაფიკი (6): იტერაცია N 2, h=0.001



გრაფიკი (7): იტერაცია N 3, h=0.001



გრაფიკი (8): ცდომილების დამოკიდებულება იტერაციის ნომერზე

თავი II. არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა ორგანზომილებიანი, მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ელიფსური განტოლებისათვის

II.1 არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა ორგანზომილებიანი, მუდმივკოეფიციენტებიანი წრფივი ელიფსური განტოლებისათვის, ორი წერტილის შემთხვევაში.

ვთქვათ D არის მართკუთხა არე ორგანზომილებიან R^2 სივრცეში უბან-უბან გლუვი Γ საზღვრით:

$$D = \{(x_1, x_2)|0 < x_1 < a,\ 0 < x_2 < b\}$$

$$\Gamma = \cup_{i=1}^{4} \Gamma_i,$$

სადაც:

$$\Gamma_1 = \{(x_1, x_2)|\ 0 \le x_1 \le a,\ x_2 = 0\},$$

$$\Gamma_2 = \{(x_1, x_2)|\ 0 \le x_1 \le a,\ x_2 = b\},$$

$$\Gamma_3 = \{(x_1, x_2)|\ x_1 = 0,\ 0 \le x_2 \le b\},$$

$$\Gamma_4 = \{(x_1, x_2)|\ x_1 = a,\ 0 \le x_2 \le b\}.$$

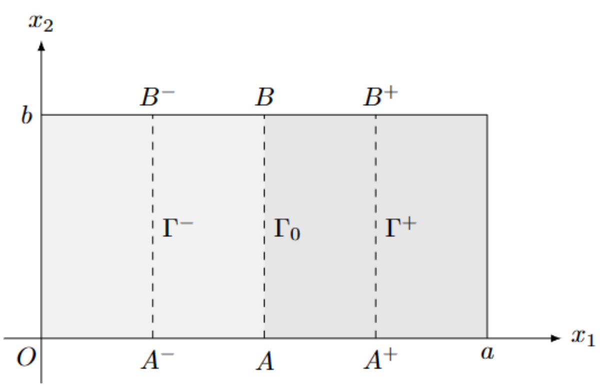
ავიღოთ A წერტილი Γ_1 წირზე და B წერტილი Γ_2 წირზე, ამით Γ_1 და Γ_2 წირები იყოფიან შესაბამისად Γ_1^-, Γ_1^+ და Γ_2^-, Γ_2^+ წირებად, სადაც $\Gamma_1^- \cup \Gamma_1^+ = \Gamma_1$ და $\Gamma_2^- \cup \Gamma_2^+ = \Gamma_2$. ამასთან გავავლოთ A და B წერტილების შემაერთებელი Γ_0 წირი, ცხადია, რომ Γ_0 წირი D არეს ყოფს ორ ნაწილად D^- და D^+. სადაც,

$$\Gamma_0 = \{(x_1, x_2)|\ x_1 = A,\ 0 \le x_2 \le b\},$$

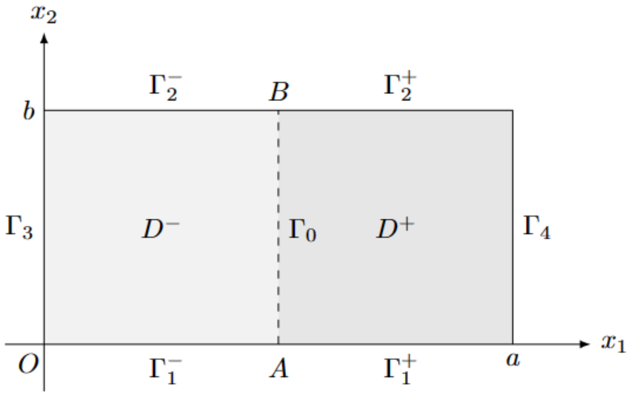
$$D^- = \{(x_1, x_2)|0 < x_1 < A,\ 0 < x_2 < b\},$$

$$D^+ = \{(x_1, x_2)|A < x_1 < a,\ 0 < x_2 < b\},$$

ასევე ავიღოთ Γ^- და Γ^+ წირები რომლებიც კვეთენ Γ_1 და Γ_2 წირებს შესაბამისად A^- , B^- და A^+, B^+ წერტილებში. იხილეთ ნახაზი (3) და (4).



ნახაზი (3)



ნახაზი (4)

მოცემულ $\overline{D} = D \cup \Gamma$ არეში განვიხილოთ არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა: ვიპოვოთ უწყვეტი ფუნქცია $u(x_1, x_2)$:

$$u(x_1,x_2) = \begin{cases} u^-(x_1,x_2), & (x_1,x_2) \in D^-, \\ u_0(x_1,x_2), & (x_1,x_2) \in \Gamma_0, \\ u^+(x_1,x_2), & (x_1,x_2) \in D^+, \end{cases} \tag{2.1.1}$$

რომელიც აკმაყოფილებს განტოლებას:

$$\Delta u^-(x_1,x_2) \equiv \frac{\partial^2 u^-}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^-}{\partial x_2^2} = f^-(x_1,x_2), \text{ როცა } (x_1,x_2) \in D^-, \tag{2.1.2'}$$

$$\Delta u^+(x_1,x_2) \equiv \frac{\partial^2 u^+}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial x_2^2} = f^+(x_1,x_2), \text{ როცა } (x_1,x_2) \in D^+. \tag{2.1.2''}$$

ფუნქცია $u(x_1, x_2)$ ასევე აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს:

$$u^-(x_1,x_2) = \varphi^-(x_1,x_2), \text{როცა } (x_1,x_2) \in \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^- \cup \Gamma_3,$$

$$u^+(x_1,x_2) = \varphi^+(x_1,x_2), \text{ როცა } (x_1,x_2) \in \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_4, \tag{2.1.3}$$

არალოკალურ საკონტაქტო პირობას Γ_0-ის წერტილებზე:

$$u^{\mp}(\Gamma_0) = u(\Gamma_0) = \gamma^- u^-(\Gamma^-) + \gamma^+ u^+(\Gamma^+) + \varphi_0(x'), \tag{2.1.4}$$

ცხადია,

$$u(A) = \gamma^- u^-(A^-) + \gamma^+ u^+(A^+) + \varphi_0(A),$$

$$u(B) = \gamma^- u^-(B^-) + \gamma^+ u^+(B^+) + \varphi_0(B), \tag{2.1.5}$$

სადაც $\gamma^- = const > 0$, $\gamma^+ = const > 0$, ხოლო φ^-, φ^+და φ_0 ცნობილი ფუნქციებია, რომლებიც ყველა პირობას აკმაყოფილებენ.

დავუშვათ რომ სრულდება შემდეგი პირობები:

I. $\gamma^- = const > 0,\ \gamma^+ = const > 0,\ \gamma^- + \gamma^+ \le 1;$

II. $\Delta u^- = 0$ D^-_ში და $\Delta u^+ = 0$ D^+_ში განტოლებათა ამონახსნებისთვის სრულდება მაქსიმუმის პრინციპი [12];

III. $u^{\mp}(x, y)$ ფუნქციები არის შემდეგი განტოლებების ამონახსნები

$$\Delta u^-(x_1,x_2)=0, \text{როცა } (x_1,x_2) \in D^-,$$

$$\Delta u^+(x_1,x_2)=0, \text{როცა } (x_1,x_2) \in D^+,$$

და მათთვის სამართლიანია შვარცის ლემა [13].

მაშინ სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 3. თუ (2.1.1)-(2.1.5) ამოცანის რეგულარული ამონახსენი არსებობს და შესრულებულია I და II პირობები, მაშინ ამონახსენი ერთადერთია.

დამტკიცება:

დავუშვათ რომ (2.1.1)-(2.1.5) ამოცანას აქვს ორი ამონახსენი $v(x_1,x_2)$ და $w(x_1,x_2)$. მაშინ $z(x_1,x_2)=v(x_1,x_2)-w(x_1,x_2)$ ფუნქციისთვის გვექნება შემდეგი ამოცანა:

$$\Delta z^-(x_1,x_2)=0, \text{ თუ } (x_1,x_2)\in D^-, \tag{2.1.6'}$$

$$\Delta z^+(x_1,x_2)=0, \text{ თუ } (x_1,x_2)\in D^+, \tag{2.1.6''}$$

$$z^-(x_1,x_2)=0, \text{ თუ } (x_1,x_2) \in \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^- \cup \Gamma_3, \tag{2.1.7'}$$

$$z^+(x_1,x_2)=0, \text{ თუ } (x_1,x_2) \in \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_4, \tag{2.1.7''}$$

$$z^{\mp}(\Gamma_0)=z(\Gamma_0)=\gamma^- z^-(\Gamma^-)+\gamma^+ z^+(\Gamma^+). \tag{2.1.8}$$

(2.1.8) ტოლობიდან შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ

$$max|z(\Gamma_0)| \le \gamma^- max|z^-(\Gamma^-)|+\gamma^+ max|z^+(\Gamma^+)|.$$

თუ გავითვალისწინებთ პირობას, რომ $\gamma^-+\gamma^+\le 1$, მივიღებთ:

$$max|z(\Gamma_0)| \le max|z^-(\Gamma^-)| \quad \text{ან} \quad max|z(\Gamma_0)| \le max|z^+(\Gamma^+)|.$$

ეს ნიშნავს რომ z ფუნქცია არ აღწევს მაქსიმუმს Γ_0-ზე, მაგრამ II პირობის მიხედვით აღწევს მაქსიმუმს D^--ს და D^+-ის საზღვრებზე. მაშინ (2.1.7) პირობის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ $z\equiv 0$. აქედან გამომდინარე შეგვიძლია დავასკვნათ, რომ (2.1.1)-(2.1.5) ამოცანის ამონახსენი ერთადერთია.

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

განვიხილოთ იტერაციული პროცესი (2.1.1)-(2.1.5) ამოცანისთვის (იხ. [7], [10]).

$$\Delta[u^-(x_1,x_2)]^{(k)}=f^-(x_1,x_2), \quad \text{თუ } (x_1,x_2) \in D^-, \tag{2.1.9'}$$

$$\Delta[u^+(x_1,x_2)]^{(k)}=f^+(x_1,x_2), \quad \text{თუ } (x_1,x_2) \in D^-, \tag{2.1.9''}$$

სასაზღვრო პირობებით:

$$[u^-(x_1,x_2)]^{(k)}=\varphi^-(x_1,x_2), \quad \text{როცა } (x_1,x_2) \in \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^- \cup \Gamma_3, \tag{2.1.10'}$$

$$[u^+(x_1,x_2)]^{(k)}=\varphi^+(x_1,x_2), \quad \text{როცა } (x_1,x_2) \in \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_4, \tag{2.1.10''}$$

და არალოკალური საკონტაქტო პირობით:

$$\left[u^{\mp}(\Gamma_0)\right]^{(k)} = [u(\Gamma_0)]^{(k)} = \gamma^{-}[u^{-}(\Gamma^{-})]^{(k-1)} + \gamma^{+}[u^{+}(\Gamma^{+})]^{(k-1)} + \varphi_0(\Gamma_0), \qquad (2.1.11)$$

სადაც $k = 1, 2, 3 \ldots$. საწყისის იტერაციაზე შეგვიძლია ავიღოთ მნიშვნელობები:

$$[u^{-}(\Gamma^{-})]^{(0)} = 0 \text{ და } [u^{+}(\Gamma^{+})]^{(0)} = 0.$$

მოცემული საწყისი მიახლოებით (2.1.9)-(2.1.11) იტერაციული პროცესის არალოკალური საკონტაქტო პირობიდან შეგვიძლია გამოვთვალოთ u ფუნქციის მნიშვნელობები Γ_0-ზე. ამით კი შესაძლებლობა გვეძლევა (2.1.1)-(2.1.5) ამოცანის ამოხსნა დავიყვანოთ ორი კლასიკური სასაზღვრო ამოცანის ამოხსნამდე. მათი ამოხსნის შემდგომ მიღებული მნიშვნელობები კი შეგვიძლია გამოვიყენოთ მომდევნო იტერაციისთვის საწყის მიახლოებად.

სანამ ზემოთ მოყვანილი იტერაციული პროცესის კრებადობის დამტკიცებაზე გადავალთ, განვიხილოთ შვარცის ლემა [13].

მსჯელობის გასამარტივებლად განვიხილოთ განტოლება:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - q(x, y)u = 0, \qquad (2.1.12)$$

დავუშვათ $q(x, y) \geq 0$, არაუარყოფითია და უწყვეტია.

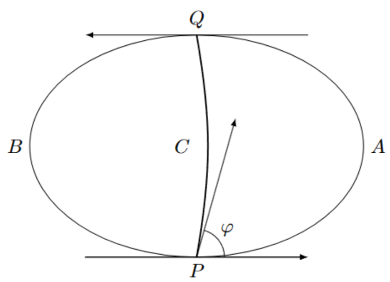
(12) განტოლება შეგვიძლია გადავწეროთ ასე:

$$\Delta u = q(x, y)u,$$

(თავისუფალი წევრით $q(x, y)u$). ამ განტოლების ნებისმიერი ამონახსნი შეიძლება წარმოვადგინოთ ორი ფუნქციის ჯამის სახით $u = v + w$, სადაც პირველი, ანუ v აკმაყოფილებს ლაპლასის განტოლებას $\Delta v = 0$ და არის საზღვარზე იღებს იმავე მნიშვნელობებს, რასაც u, ხოლო მეორე - w არის პუასონის განტოლების ამონახსნი $\Delta w = q(x, y)u$ და არის საზღვარზე ნულის ტოლია.

განვიხილოთ შემდეგი ლემა, რომელიც ეკუთვნის შვარცს [13].

ვთქვათ D იყოს შემოსაზღვრული არე Γ წირით. ავიღოთ Γ-ზე ორი წერტილი P და Q და ჩავთვალოთ რომ არსებობს მხები თითოეულ ამ წერტილზე. ჩავხაზოთ D არეში P-სა და Q-ს შემაერთებელი C წირი. C წირის მიმართ ვაკეთებთ დაშვებას, რომ მას გააჩნია მხებები P და Q წერტილებში, რომელიც არ ემთხვევა Γ წირის მხებს იმავე წერტილებში. გარდა ამისა, ჩვენ ვთვლით, რომ PQ –თი საწყისი არე იყოფა ორ ახალ არედ. Γ საზღვრის წირის შესაბამისი ნაწილები აღვნიშნოთ A და B-თი (იხ. ნახაზი 5).



ნახაზი (5)

ვთქვათ, u იყოს ჰარმონიული ფუნქცია, რომელსაც A-ზე აქვს ნულის ტოლი ზღვრული მნიშვნელობები, ხოლო B-ზე ზღვრული მნიშვნელობები აბსოლუტური მნიშვნელობით არ აღემატება რაიმე m რიცხვს.

მაშინ მტკიცდება, რომ არსებობს ისეთი დადებითი რიცხვი $\theta < 1$, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ D არისა და C წირის გეომეტრიულ თვისებებზე, და არ არის დამოკიდებული u ფუნქციის შერჩევაზე და m რიცხვზე, რომ C წირზე სამართლიანია შემდეგი შეფასება:

$$|u| \leq \theta m.$$

დამტკიცება:

ლემის დასამტკიცებლად შეგვიძლია შემოვიფარგლოთ $m = 1$ შემთხვევით, რადგან სხვა შემთხვევაში u-ს ნაცვლად ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ $\frac{u}{m}$ ფუნქცია.

შემოვიღოთ ფუნქცია U, ჰარმონიული და შემოსაზღვრული D-ში, რომელიც A საზღვარზე იღებს ნულის ტოლ მნიშვნელობებს, ხოლო B საზღვარზე მნიშვნელობები 1-ის ტოლია.

D არის Γ კონტურზე სრულდება შემდეგი უტოლობა:

$$-U \leq u \leq +U$$

მაქსიმუმის პრინციპის ძალით ჩვენ შეგვიძლია დავამტკიცოთ, რომ იგივე უტოლობა სრულდება D არის შიგნითაც. სხვაგვარად რომ ვთქვათ, ყველგან D არეში სრულდება უტოლობა:

$$|u| \leq U.$$

ყველგან D-ში ფუნქცია U ნაკლებია 1-ზე, მათ შორის, C წირის ყველა შიდა წერტილზე.

ლემის დასამტკიცებლად უნდა ვაჩვენოთ, რომ P და Q წერტილებთან მიახლოებისას C წირის გასწვრივ, U მიისწრაფის 1-ზე ნაკლები ზღვრული მნიშვნელობისაკენ.

განვიხილოთ პოლარული კოორდინატები r და φ, პოლუსით P და მივმართოთ პოლარული წარმოსახვითი ღერძი Γ-ს მხების გასწვრივ A წირის მხარეს. ავიღოთ φ კუთხის ის მხარე, რომელიც Γ-ს გასწვრივ P წერტილთან მიახლოებისას A წირის მხრიდან მიისწრაფის ნულისკენ. პოლარული კუთხის მიმართულება ისე უნდა იყოს არჩეული, რომ P წერტილთან მიახლოებისას Γ-ს გასწვრივ, B წირის მხრიდან პოლარული კუთხე მიისწრაფოდეს $+\pi$ მნიშვნელობისკენ.

ფუნქცია $\frac{\varphi}{\pi}$ იქნება რეგულარული ჰარმონიული ფუნქცია D არეში და Γ-ზე ექნება უწყვეტ მნიშვნელობები, გარდა P წერტილისა, სადაც ექნება 1-ის ტოლი „ნახტომი".

ფუნქცია $U - \frac{\varphi}{\pi} = v$ არის ჰარმონიული D არეში. მისი სასაზღვრო მნიშვნელობები უწყვეტია P წერტილის მიდამოში და მიისწრაფის 0-ისკენ P-სთან მიახლოებისას. აქედან გამომდინარე, შეგვიძლია ვთქვათ, რომ P წერტილთან მიახლოებისას D არიდან ნებისმიერი გზით, მათ შორის C წირის გასწვრივ, v მიისწრაფის ნულისკენ.

მაგრამ თუ P-ს მივუახლოვდებით C წირის გასწვრივ, მაშინ, რადგან C წირის მხები P წერტილში არის განსხვავებული Γ-ს მხებისგან ამავე წერტილში, რომელიც პოლარულ ღერძად გვაქვს აღებული, φ კუთხის მნიშვნელობები მიუახლოვდება გარკვეულ დადებით ზღვრულ მნიშვნელობას α, რომელიც ნაკლებია π-ზე.

აქედან გამომდინარე C-ს გასწვრივ P წერტილისკენ მიახლოებისას, U მიისწრაფის $\frac{\alpha}{\pi}$ ზღვრისკენ, რომელიც არის 0-სა და 1-ს შორის.

იგივე შეგვიძლია ვთქვათ Q წერტილისთვისაც. ამით ლემა დამტკიცებულია.

(2.1.9)-(2.1.11) იტერაციული პროცესის კრებადობისათვის სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 4. თუ სრულდება I და III პირობები, მაშინ (2.1.9)-(2.1.11) იტერაციული პროცესი კრებადია (2.1.1)-(2.1.5) ამოცანის ამონახსენისაკენ უსასრულოდ კლებადი გეომეტრიული პროგრესიის სიჩქარით.

დამტკიცება:

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$\left[z^{\mp}(x_1,x_2)\right]^{(k)} = \left[u^{\mp}(x_1,x_2)\right]^{(k)} - u^{\mp}(x_1,x_2),$$

სადაც $u^{\mp}(x_1,x_2)$ ფუნქციები (2.1.1)-(2.1.5) ამოცანის ამონახსნებია, ხოლო $\left[u^{\mp}(x_1,x_2)\right]^{(k)}$ (2.1.9)-(2.1.11) ამოცანის ამონახსნები, მაშინ $z^{\mp}(x_1,x_2)$ ფუნქციებისთვის მივიღებთ შემდეგ ამოცანას:

$$\Delta[z^{-}(x_1,x_2)]^{(k)} = 0, \quad \textit{თუ}\ (x_1,x_2) \in D^{-}, \tag{2.1.13'}$$

$$\Delta[z^{+}(x_1,x_2)]^{(k)} = 0, \quad \textit{თუ}\ (x_1,x_2) \in D^{-}, \tag{2.1.13''}$$

$$[z^{-}(x_1,x_2)]^{(k)} = 0, \quad \textit{როცა}\ (x_1,x_2) \in \Gamma_1^{-} \cup \Gamma_2^{-} \cup \Gamma_3, \tag{2.1.14'}$$

$$[z^{+}(x_1,x_2)]^{(k)} = 0, \quad \textit{როცა}\ (x_1,x_2) \in \Gamma_1^{+} \cup \Gamma_2^{+} \cup \Gamma_4, \tag{2.1.14''}$$

$$\left[z^{\mp}(\Gamma_0)\right]^{(k)} = [z(\Gamma_0)]^{(k)} = \gamma^{-}[z^{-}(\Gamma^{-})]^{(k-1)} + \gamma^{+}[z^{+}(\Gamma^{+})]^{(k-1)}, \tag{2.1.15}$$

სადაც $k = 1, 2, 3 \dots$. საწყისის იტერაციაზე შეგვიძლია ავიღოთ შემდეგი მნიშვნელობები:

$$[z^{-}(\Gamma^{-})]^{(0)} = 0 \quad \text{და} \quad [z^{+}(\Gamma^{+})]^{(0)} = 0.$$

(2.1.15) ტოლობიდან შეგვიძლია დავწეროთ შეფასება:

$$\max_{\Gamma_0}\left|[z(\Gamma_0)]^{(k)}\right| \le \gamma^{-}\max_{\Gamma^{-}}\left|[z^{-}(\Gamma^{-})]^{(k-1)}\right| + \gamma^{+}\max_{\Gamma^{+}}\left|[z^{+}(\Gamma^{+})]^{(k-1)}\right|, \tag{2.1.16}$$

რადგან (2.1.13) განტოლებისათვის სრულდება III პირობა, შვარცის ლემის გამოყენებით მივიღებთ:

$$\max_{\Gamma^{-}}[z^{-}(\Gamma^{-})]^{(k)} \le q^{-}\max_{\Gamma_0}\left|[z(\Gamma_0)]^{(k)}\right|, \tag{2.1.17'}$$

$$\max_{\Gamma^+}[z^+(\Gamma^+)]^{(k)} \leq q^+ \max_{\Gamma_0} \left|[z(\Gamma_0)]^{(k)}\right|, \qquad (2.1.17'')$$

სადაც $q^- = const, q^+ = const, 0 < q^- < 1$ და $0 < q^+ < 1$, ამასთან, მოცემული კონსტანტები დამოკიდებულია მხოლოდ D^- და D^+ არის გეომეტრიულ თვისებებზე.

თუ გამოვიყენებთ (16)-(17) უტოლობებს, მივიღებთ რომ

$$\max_{\Gamma_0} \left|[z(\Gamma_0)]^{(k)}\right| \leq [q^-\gamma^- + q^+\gamma^+] \max_{\Gamma_0} \left|[z(\Gamma_0)]^{(k-1)}\right|,$$

ან

$$\max_{\Gamma_0} \left|[z(\Gamma_0)]^{(k)}\right| \leq Q \max_{\Gamma_0} \left|[z(\Gamma_0)]^{(k-1)}\right|,$$

სადაც, $Q = q^-\gamma^- + q^+\gamma^+$.

უკანასკნელი უტოლობიდან შეგვიძლია დავასკვნათ:

$$\max_{\Gamma_0} \left|[z(\Gamma_0)]^{(k)}\right| \leq Q \max_{\Gamma_0} \left|[z(\Gamma_0)]^{(k-1)}\right| \leq Q^2 \max\left|[z(\Gamma_0)]^{(k-2)}\right| \leq \ldots \leq Q^k \max_{\Gamma_0} \left|[z(\Gamma_0)]^{(0)}\right|.$$

თუ გავითვალისწინებთ I პირობას $\gamma^- + \gamma^+ \leq 1$,

$$0 < q^-\gamma^- + q^+\gamma^+ = Q < \gamma^- + \gamma^+ \leq 1$$

მივიღეთ რომ $0 < Q < 1$.

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$\lim_{k\to\infty} [z(\Gamma_0)]^{(k)} = 0.$$

თუ (2.1.1)-(2.1.5) ამოცანის ამონახსენი არსებობს, მაშინ მაქსიმუმის პრინციპის [12] გამოყენებით მივიღებთ რომ:

$$\max_{D^-}\left|[u^-(x_1,x_2)]^{(k)} - u^-(x_1,x_2)\right| = O(Q^k),$$

$$\max_{D^+}\left|[u^+(x_1,x_2)]^{(k)} - u^+(x_1,x_2)\right| = O(Q^k),$$

და აქედან გამომდინარე

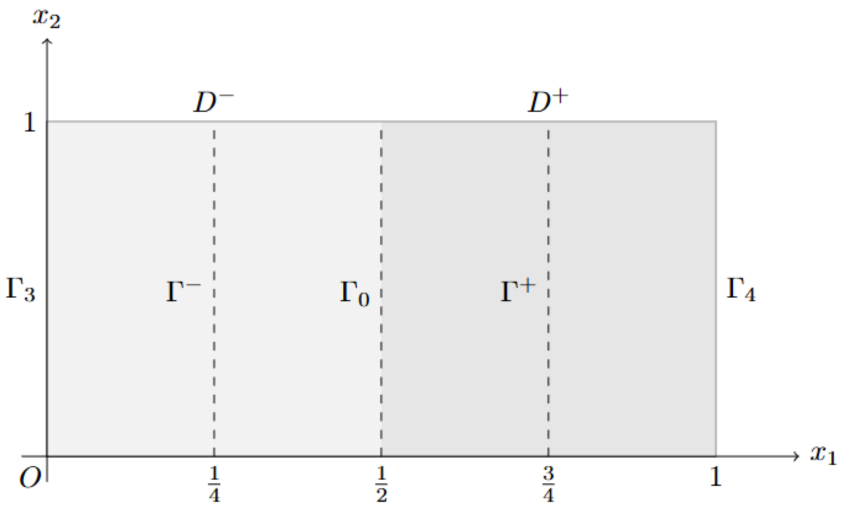
$$\max_{\overline{D}}\left|[u(x_1,x_2)]^{(k)} - u(x_1,x_2)\right| = O(Q^k).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია.

II.2 რიცხვითი მაგალითი (2.1.1)-(2.1.5) ამოცანისთვის

განვიხილოთ რიცხვითი მაგალითი არალოკალური საკონტაქტო პირობით ელიფსური მუდმივკოეფიციენტებიანი განტოლებისათვის.

ვთქვათ მოცემულია არე: $D = \{(x_1, x_2)|0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1\}$, იხ. ნახაზი:



ნახაზი (6)

ვიპოვოთ $\overline{D}$ არეში უწყვეტი ფუნქცია (2.1.1) $u(x_1, x_2)$ რომელიც აკმაყოფილებს მომდევნო განტოლებას:

$$\Delta u^-(x_1, x_2) \equiv \frac{\partial^2 u^-}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^-}{\partial x_2^2} = f^-(x_1, x_2), \quad \text{როცა } (x_1, x_2) \in D^-, \tag{2.2.1'}$$

$$\Delta u^+(x_1, x_2) \equiv \frac{\partial^2 u^+}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u^+}{\partial x_2^2} = f^+(x_1, x_2), \quad \text{როცა } (x_1, x_2) \in D^+, \tag{2.2.1''}$$

სადაც

$$f^-(x_1, x_2) = 2\pi x_1 \cos(\pi x_1)\cos(\pi x_2) - 2\pi x_2 sin(\pi x_2)(\sin(\pi x_1) + \pi x_1 cos(\pi x_1)), \tag{2.2.2'}$$

$$f^+(x_1, x_2) = 2\pi(x_1 - 1)\cos(\pi x_1)\left(\cos(\pi x_2) - \pi x_2 sin(\pi x_2)\right) - 2\pi x_2 sin(\pi x_1)\sin(\pi x_2), \tag{2.2.2''}$$

ფუნქცია $u(x_1, x_2)$ ასევე აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობებს:

$$u^-(x_1, x_2) = 0, \quad \textit{როცა } (x_1, x_2) \in \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^- \cup \Gamma_3, \tag{2.2.3'}$$

$$u^+(x_1, x_2) = 0, \quad \textit{როცა } (x_1, x_2) \in \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_4, \tag{2.2.3''}$$

და არალოკალურ საკონტაქტო პირობას:

$$u^{\mp}\left(\frac{1}{2}, x_2\right) = u\left(\frac{1}{2}, x_2\right) = \frac{1}{2}u^-\left(\frac{1}{4}, x_2\right) + \frac{1}{4}u^+\left(\frac{3}{4}, x_2\right) - \frac{3\sqrt{2}}{32}x_2 sin(\pi x_2). \tag{2.2.4}$$

განვიხილოთ იტერაციული პროცესი:

$$\frac{\partial^2 (u^-)^{(k)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 (u^-)^{(k)}}{\partial x_2^2} = f^-(x_1, x_2), \tag{2.2.5'}$$

$$\frac{\partial^2 (u^+)^{(k)}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 (u^+)^{(k)}}{\partial x_2^2} = f^+(x_1, x_2), \tag{2.2.5''}$$

$$u^-(x_1, x_2) = 0, \quad \textit{როცა}\,(x_1, x_2) \in \Gamma_1^- \cup \Gamma_2^- \cup \Gamma_3, \tag{2.2.6'}$$

$$u^+(x_1, x_2) = 0, \quad \textit{როცა}\,(x_1, x_2) \in \Gamma_1^+ \cup \Gamma_2^+ \cup \Gamma_4\,, \tag{2.2.6''}$$

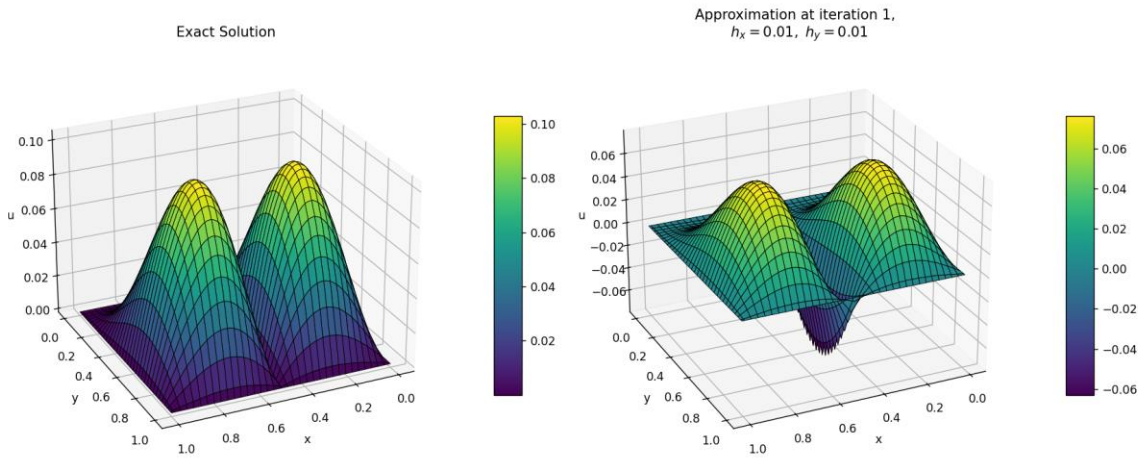
$$\left[u^{\mp}\left(\frac{1}{2}, x_2\right)\right]^{(k)} = \left[u\left(\frac{1}{2}, x_2\right)\right]^{(k)} = \frac{1}{2}\left[u^-\left(\frac{1}{4}, x_2\right)\right]^{(k-1)} + \frac{1}{4}\left[u^+\left(\frac{3}{4}, x_2\right)\right]^{(k-1)} - \frac{3\sqrt{2}}{32} x_2 sin(\pi x_2),$$

სადაც $k = 1, 2, \ldots.$, ხოლო საწყისი მნიშვნელობები $\left[u^{\mp}\right]^0 = 0.$

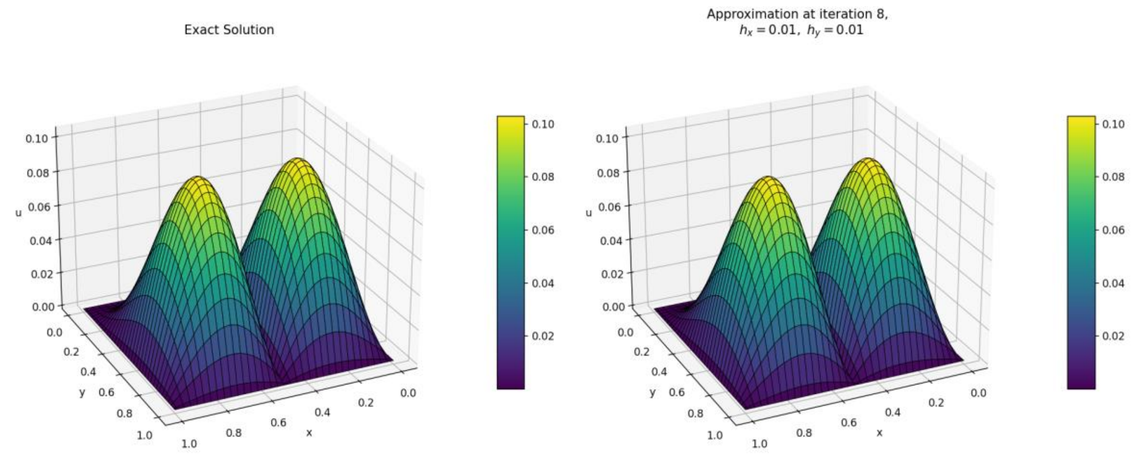
ქვემოთ მოყვანილი რიცხვით გამოთვლები შესრულებულია Python პროგრამირების ენაში.

იტერაცია	აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა, $\boldsymbol{h = 0.01}$
1	7.68E-02
2	1.99E-02
3	5.40E-03
4	1.50E-03
5	4.15E-04
6	1.09E-04
7	2.34E-05
8	1.52E-05
9	1.82E-05
10	1.92E-05
11	1.94E-05
12	1.95E-05
მინიმალური ცდომილება	იტერაცია 8: 1.52E-05

ცხრილი 12

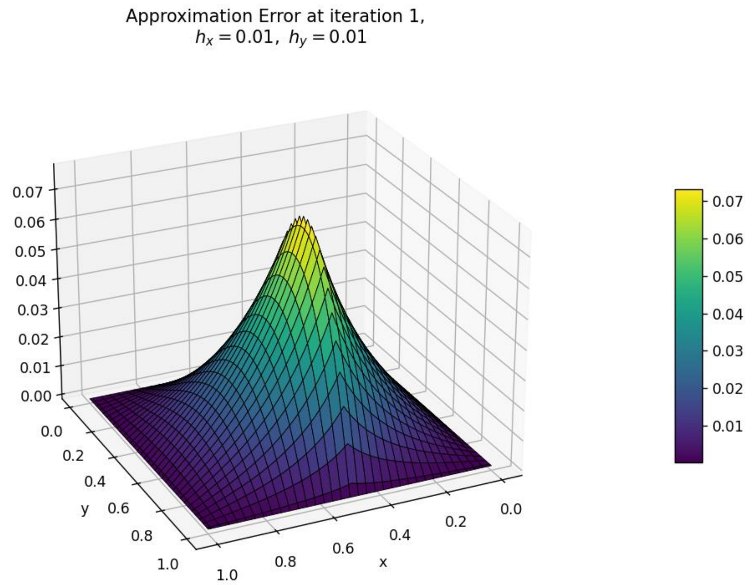


ფიგურა (1)

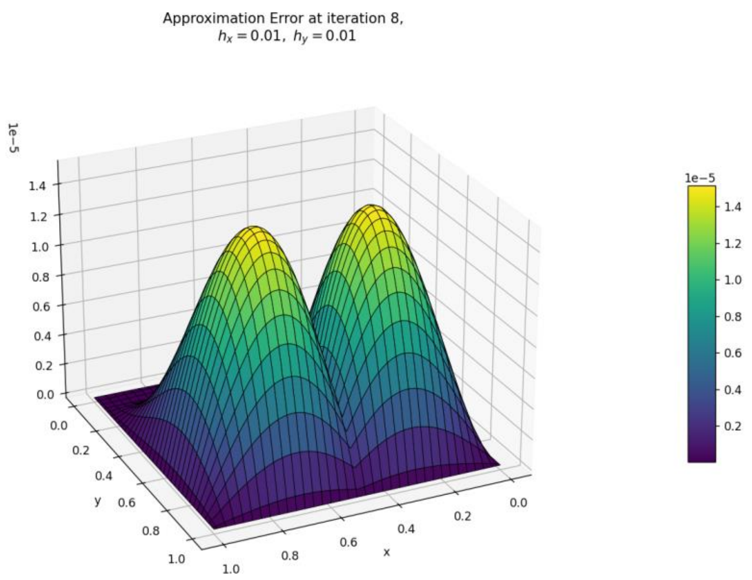


ფიგურა (2)

ფიგურა 1-სა და 2-ზე ნაჩვენებია ზუსტი ამონახსნის და რიცხვით მიახლოების ნახაზები პირველ და მერვე იტერაციაზე.

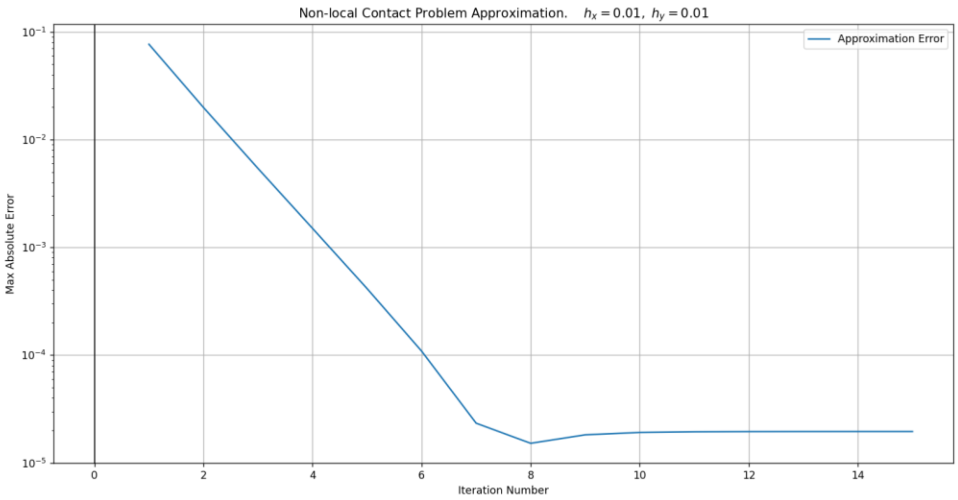


ფიგურა (3)



ფიგურა (4)

ფიგურა 3-სა და 4-ზე ნაჩვენებია რიცხვითი მიახლოების ცდომილება თითოეული წერტილისთვის. პირველ იტერაციაზე ზუსტ ამონახსნსა და რიცხვით ამონახსნს შორის განსხვავების მაგნიტუდა მერყეობს 0.07 დან 0.01-მდე, ხოლო მერვე იტერაციაზე 1.4×10^{-5} დან $0.2 \times 10^{-5} -$ მდე.



გრაფიკი (9)

მე-9 გრაფიკზე მოცემულია აბსოლუტური ცდომილების უსასრულო ნორმა იტერაციის მიხედვით.

თავი III. არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა დირიხლეს კლასიკური ამოცანისთვის წრეზე.

III.1 დირიხლეს კლასიკური ამოცანა წრეზე

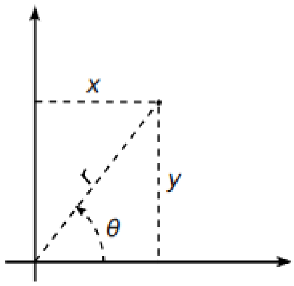
განვიხილოთ ლაპლასის განტოლება პოლარულ კოორდინატებში [14]

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0.$$

მოცემული განტოლება გადავწეროთ შემდეგნაირად:

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, \qquad (3.1.1)$$

სადაც,



$$x = r\cos\theta,$$

$$y = r\sin\theta,$$

$$x^2+y^2=r^2.$$

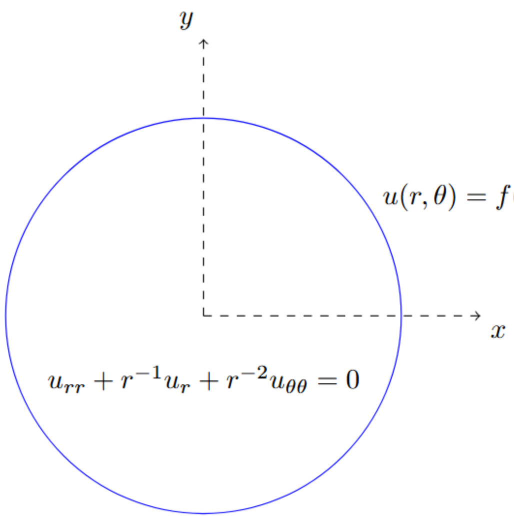
განსახილველ არედ ავიღოთ წრე რადიუსით ρ, ცენტრით სათავეში.

განვიხილოთ დირიხლეს კლასიკური ამოცანა წრეზე (3.1.1) განტოლებისათვის.

$$u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0, \quad 0<r<\rho \quad \text{და} \quad -\pi\le 0<\pi. \qquad (3.1.2)$$

სასაზღვრო პირობით:

$$u(\rho,\theta)=f(\theta), \quad -\pi\le 0<\pi.$$



ნახაზი (7)

განვიხილოთ ნამრავლი $v(r,\theta)=R(r)\Theta(\theta)$, რომელიც აკმაყოფილებს (3.1.1) განტოლებას.

$$v_{rr}+\frac{1}{r}v_r+\frac{1}{r^2}v_{\theta\theta}=R''\Theta+\frac{1}{r}R'\Theta+\frac{1}{r^2}R\Theta''=0,$$

ყველა (r,θ)-სთვის როცა $r\neq 0$.

აქედან შეგვიძლია დავწეროთ:

$$\frac{r^2R''+rR'}{R}=-\frac{\Theta''}{\Theta}=\lambda,$$

სადაც λ არის მუდმივი. ეს განტოლება ექვივალენტურია შემდეგის:

$$\Theta''+\lambda\Theta=0$$

და

$$r^2R''+rR'-\lambda R=0. \tag{3.1.3}$$

ვინაიდან (r,π) და $(r,-\pi)$ პოლარულ კოორდინატებში ერთი და იგივე წერტილებია, Θ-ს დავადოთ პერიოდული სასაზღვრო პირობები:

$$\Theta''+\lambda\Theta=0,\quad \Theta(-\pi)=\Theta(\pi),\quad \Theta'(-\pi)=\Theta'(\pi). \tag{3.1.4}$$

რადგან არ გვინდა რომ $R\Theta$ იყოს ნულის ტოლი, ამიტომ λ უნდა იყოს (3.1.4) განტოლების საკუთრივი მნიშვნელობა, ხოლო Θ უნდა გავაიგივოთ საკუთრივ ფუნქციად.

(3.1.4) განტოლების საკუთრივი მნიშვნელობებია $\lambda_0=0$ საკუთრივი ფუნქციით $\Theta_0=1$ და $n=1,2,3,\ldots$ - ისთვის $\lambda_n=n^2$ საკუთრივი ფუნქციით $\cos n\theta$ და $\sin n\theta$ მაშასადამე,

$$\Theta_n=\alpha_n\cos n\theta+\beta_n\sin n\theta,$$

სადაც α_n და β_n მუდმივებია (იხ. [14] თეორემა 11.1.6).

(3.1.3) განტოლებაში შევიტანოთ $\lambda=0$ მნიშვნელობა, მივიღებთ:

$$r^2R''+rR'=0,$$

აქედან

$$rR''+R'=0,$$

$$(rR_0')'=0,$$

$$R_0'=\frac{c_1}{r}$$

და

$$R_0=c_2+c_1\ln r.$$

თუ $c_1\neq 0$, მაშინ

$$\lim_{r\to 0+}|R_0(r)|=\infty,$$

რადგან R უნდა იყოს შემოსაზღვრული როცა $r\to 0+$, გამოდის რომ $c_1=0$.

ვთქვათ $c_2=1$, მაშინ $R_0=1$ და $v_0(r,\theta)=R_0(r)\Theta_0(\theta)=1$, რაც აკმაყოფილებს (3.1.2)-ს $f(\theta)=1$ -ით

ახლა შევიტანოთ (3.1.3) განტოლებაში $\lambda = n^2$, რაც გვაძლევს ეილერის განტოლებას R_n-ისთვის:

$$r^2 R_n'' + rR_n' - n^2 R_n = 0. \tag{3.1.6}$$

დავუშვათ რომ $R_n = r^s$

$$r^2(r^s)'' + r(r^s)' - n^2 r^s = 0, \tag{3.1.7}$$

$r^s \neq 0$, (3.1.7) ის გაწარმოებით და შემდგომ r^s-ზე გაყოფით მივიღებთ

$$(s-n)(s+n),$$

აქედან გამომდინარე (3.1.6) განტოლების ზოგადი ამონახსენია:

$$R_n = c_1 r^n + c_2 r^{-n}. \tag{3.1.8}$$

ვინაიდან გვინდა, რომ R_n იყოს შემოსაზღვრული როცა $r \to 0+$, ამიტომ $c_2 = 0$

და ვთქვათ რომ $c_1 = \rho^{-n}$, მაშინ:

$$R_n(r) = \frac{r^n}{\rho^n}$$

და მივიღებთ, რომ:

$$v_n(r,\theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta) = \frac{r^n}{\rho^n}(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta),$$

რაც აკმაყოფილებს (3.1.2)-ს $f(\theta) = \alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta$ -ით.

რასაც მივყავართ შემდეგ განსაზღვრებამდე, რომ (3.1.2) განტოლების სასაზღვრო ამოცანის შემოსაზღვრული ფორმალური ამონახსნი არის:

$$v_n(r,\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{\rho^n}(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta), \tag{3.1.9}$$

სადაც

$$F(\theta) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta)$$

არის f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი $[-\pi,\pi]$-ზე, ხოლო

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta$$

და

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta, \qquad \beta_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\, sin\, n\theta\, d\theta, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

კოეფიციენტების (3.1.9) განტოლებაში შეტანით მივიღებთ ფორმულას, რომელიც პუასონის ფორმულით არის ცნობილი:

$$v_n(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\frac{\rho^2 - r^2}{\rho^2 + r^2 - 2\rho r cos\,(\theta - \psi)}d\psi, \qquad r < \rho.$$

III.2 არალოკალური და საკონტაქტო ამოცანების მაგალითები წრიულ არეზე

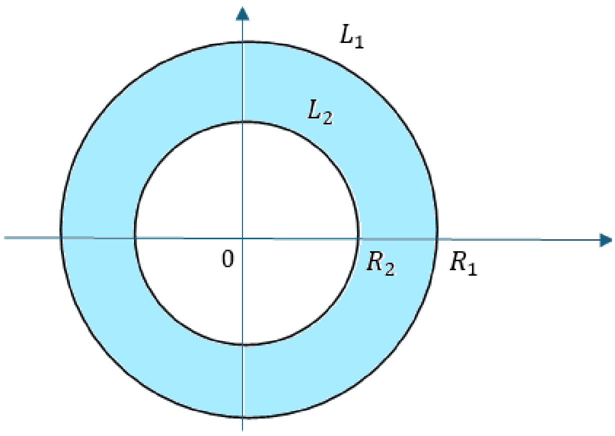
სამაგისტრო ნაშრომში განხილული თემატიკის გავრცელება საინტერესოდ მიმაჩნია წრიულ არეზე დასმული ამოცანებისათვის. შევეცადეთ დაგვესვა რამდენიმე ამოცანა შემდგომში სავარაუდო შესწავლის მიზნით.

არალოკალური ამოცანა 1. ამოვხსნათ დირიხლეს ამოცანა არეში, რომელიც მოთავსებულია ორ კონცენტრულ წრეწირს L_1 და L_2 შორის, R_1 და R_2 რადიუსებით, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. პოლარულ კოორდინატებში განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\theta\theta} = 0,\ R_1 < \rho < R_2,\ \ 0 \le \theta < 2\pi,$$

$u(\rho,\theta)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს არალოკალურ სასაზღვრო პირობას

$$u(R_1,\theta) = \alpha\, u(R_2,\theta) + \varphi(\theta),\quad 0 \le \theta \le 2\pi.$$



ამოცანის დასმა და ამოხსნადობის დამატებითი პირობები შემდგომი შესწავლისას დაზუსტდება.

არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა 2. ამოვხსნათ დირიხლეს ამოცანა არეში, რომელიც მოთავსებულია ორ კონცენტრულ წრეწირს L_1 და L_2 შორის, R_1 და R_2 რადიუსებით, ცენტრით კოორდინატთა სათავეში. ამასთან, $0 < c_1 < R_1$ და $R_1 < c_2 < R_2$. პოლარულ კოორდინატებში განტოლება ჩაიწერება შემდეგნაირად:

$$\rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\theta\theta} = 0,\ 0 < \rho < R_1,\ \ 0 \le \theta < 2\pi,$$

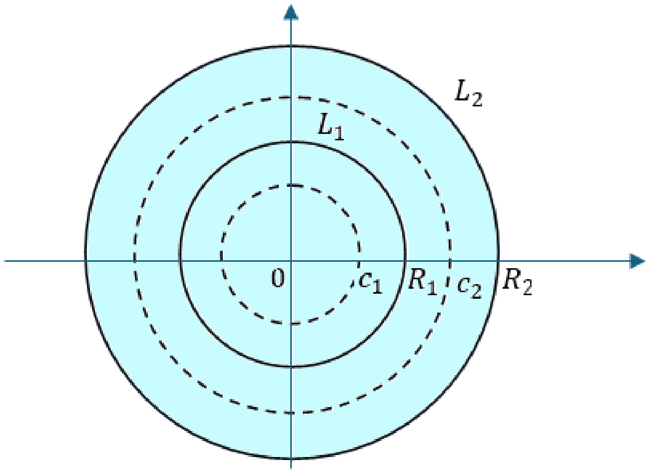
$$\rho^2 u_{\rho\rho} + \rho u_\rho + u_{\theta\theta} = 0,\ R_1 < \rho < R_2,\ \ 0 \le \theta < 2\pi,$$

$u(\rho,\theta)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს სასაზღვრო პირობას R_2-ზე

$$u(R_2,\theta) = \varphi_1(\theta),\quad 0 \le \theta < 2\pi,$$

და არალოკალურ საკონტაქტო პირობას

$$u(R_1,\theta) = \alpha_1\, u(c_1,\theta) + \alpha_2\, u(c_2,\theta) + \varphi_2(\theta),\quad 0 \le \theta < 2\pi.$$



ზედა ამოცანის ანალოგიურად, ამოცანის დასმა და ამოხსნადობის დამატებითი პირობები შემდგომი შესწავლისას დაზუსტდება.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. T. Carleman (1933), Sur la tésorie des équations integrales linéaires et ses applications, Verh. Internat. Math. Kongr., Zürich, 1932: 138-151.
2. R. Beals (1964), Bull. Amer. Math. Soc., 70, 5: 693-696.
3. J.R. Canon (1963), Quart. Appl. Math., 21: 155-160.
4. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, "Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems," *Doklady Akademii Nauk,* vol. 185, pp. 739-740, 1969.
5. M. P. Sapagovas, "Difference method of increased order of accuracy for the Poisson equation with nonlocal conditions,"Differential Equations, vol. 44, no. 7, pp. 1018–1028, 2008.
6. A. Ashyralyev and A. Hamad, "Numerical solution of the nonlocal boundary value problem for elliptic equations," Bulletin of the Karaganda University, Mathematics series, vol. 3, no. 91, pp. 99–107, 2018.
7. Gordeziani D., Meladze I. Nonlocal Contact Problem for Two-Dimansional Linear Elliptic Equations // Bulletin of the Georgian National Academy of sciences - 2014, vol. 8, no 1-8 p. 40-45
8. ჰ.მელაძე, ი.მელაძე, არალოკალური საკონტაქტო ამოცანა მუდმივკოეფიციენტებიანი მეორე რიგის ჩვეულებრივი დიფერენციალური განტოლებისთვის // საქართველოს საპატრიარქოს წმიდა ანდრია პირველწოდებულის სახელობის ქართული უნივერსიტეტის შრომები, ტომი II, გამომცემლობა „ქართული უნივერსიტეტი", თბილისი 2015, გვ.186-191.
9. T.Davitashvili, H.Meladze, I. Meladze Nonlocal contact problem for nonhomogeneous second order ordinary differential equations. Tskhum-Abkhazian Academy of Sciences. Proceedings, v. XIII - XIV, Tbilisi, Publishing House "SAARI", 2017, pp. 49 – 58.
10. Tinatin Davitashvili, Hamlet Meladze, Francisco Criado-Aldeanueva, Jose Maria Sanchez, "On One Generalization of the Multipoint Nonlocal Contact Problem for Elliptic Equation in Rectangular Area", *Journal of Mathematics*, vol. 2022, Article ID 2787606, 13 pages, 2022. https://doi.org/10.1155/2022/2787606
11. Protter, M.H., Weinberger, H.F. (1984). The One-Dimensional Maximum Principle. In: Maximum Principles in Differential Equations. Springer, New York, NY.
12. Han, Qing; Lin, Fanghua Elliptic partial differential equations. Courant Lecture Notes in Mathematics, 1. New York University, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York; American Mathematical Society, Providence, RI, 1997. x+144 pp.
13. L. V. Kantarovich and V. I. Krilov, "Priblijonnie Metodi Visshego Analiza (5-e Izd," in Russian, 1962.
14. Trench, William F., "Elementary Differential Equations with Boundary Value Problems" (2013). Faculty Authored and Edited Books & CDs, 9. https://digitalcommons.trinity.edu/mono/9