მულტიპლიკაციური სისტემები ნულგანზომილებიან ლოკალურად კომპაქტურ აბელის ჯგუფებზე

სამაგისტრო ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკაში მეცნიერებათა მაგისტრის აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ნიკა არეშიძე

ხელმძღვანელები: თენგიზ კოპალიანი, გიორგი ტეფნაძე

მათემატიკის დეპარტამენტი
ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

16 ივლისი 2024

ტოპოლოგიური ჯგუფები

განსაზღვრება

ვთქვათ, $(G, +)$ არის ჯგუფი და ტოპოლოგიური სივრცე ისეთი, რომ ასახვები

$$+ : G \times G \to G, \ (x, y) \to x + y,$$

$$- : G \to G, \ x \to -x,$$

უწყვეტია შესაბამისად G-ს და $G \times G$ ნამრავლის ტოპოლოგიაში.

განსაზღვრება

ვთქვათ, X არის ტოპოლოგიური სივრცე, ვიტყვით, რომ X სივრცე არის ჰაუსდორფის თუ $x \neq y$ მაშინ არსებობს თანაუკვეთი ღია U, V სიმრავლეები ისეთი, რომ $x \in U$ და $y \in V$.

ტოპოლოგიური ჯგუფები

ვთქვათ, $(G, +)$ არის ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური აბელური ჯგუფი. იმისათვის, რომ $(G, +)$ აბელურ ჯგუფზე მოიცეს ტოპოლოგია ამისთვის საკმარისია ჩვენ გვქონდეს ბაზა $\{U_\alpha\}$, G ჯგუფის ნულოვანი ელემენტისთვის. ამ შემთხვევაში ნებისმიერი $a \in G$ ელემენტის ბაზა იქნება $a + U_\alpha$.

G აბელური ჯგუფის ნულის მიდამოთა ბაზა აღვნიშნოთ U_0-ით მაშინ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- ყველა სიმრავლის თანაკვეთა U_0-დან არის $\{0\}$,
- ნებისმიერი ორი სიმრავლის თანაკვეთა U_0-დან შეიცავს რომელიმე სიმრავლეს ამ სისტემიდან,
- ყოველი U-თვის U_0-დან არსებობს $V \in U_0$ ისეთი, რომ $V + V \subset U$,
- ყოველი U-თვის U_0-დან და ყოველი $a \in U$-თვის არსებობს $V \in U_0$ ისეთი, რომ $a + V \subset U$.

ტოპოლოგიური ჯგუფები

პირიქით, თუ G არის აბელური ჯგუფი და U_0 სისტემა აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ პირობებს, მაშინ G ჯგუფზე შეიძლება მოიცეს ტოპოლოგია მხოლოდ ერთადერთი გზით, ისე რომ ჯგუფის ოპერაციები იყოს უწყვეტი ამ ტოპოლოგიაში და U_0 სისტემა იქნება ნულის მიდამოთა ბაზა. ხოლო $a \in G$ ელემენტის მიდამოთა ბაზის მისაღებად უნდა ავიღოთ $a + U_\alpha$ სიმრავლეები. (იხ. [24]).

განსაზღვრება

ვთქვათ, G არის ტოპოლოგიური ჯგუფი. H-ს ეწოდება G-ს **ქვეჯგუფი** თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:

- H არის G-ს ქვეჯგუფი ალგებრული აზრით,
- H არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე G-ს ტოპოლოგიაში.

თეორემა

G ტოპოლოგიური ჯგუფის ყოველი ღია ქვეჯგუფი H არის ასევე ჩაკეტილი.

ტოპოლოგიური ჯგუფები

თეორემა

ვთქვათ, G აბელური ტოპოლოგიური ჯგუფი და ნულოვანი ელემენტის ყოველი მიდამო შეიცავს ღია ქვეჯგუფს, მაშინ ნულოვანი ელემენტის ბმული კომპონენტი არის $\{0\}$.

განსაზღვრება

ჯგუფს რომლის ნულოვენი ელემენტის ბმული კომპონენტი არის $\{0\}$ ეწოდება **ნულგანზომილებიანი ჯგუფი**.

განსაზღვრება

ტოპოლოგიურ ჯგუფს რომელიც არის ჰაუსდორფის და ლოკალურად კომპაქტური ეწოდება **ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფი**. ხოლო თუ ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური ჯგუფი არის კომპაქტური ჩვენ მას **კომპაქტურ ჯგუფს** ვუწოდებთ.

ტოპოლოგიური ჯგუფები

თეორემა

ვთქვათ, G ლოკალურად კომპაქტური არსებითად არაბმული აბელის ჯგუფია თვლადობის მეორე აქსიომით. ამ შემთხვევაში ტოპოლოგია მოიცემა ერთმანეთში ჩალაგებული ღია ქვეჯგუფების საშუალებით:

$$\supset G_{-n} \supset \ldots \supset G_0 \supset G_1 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots,$$

ისეთი, რომ

$$\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} G_n = \{0\}, \quad \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} G_n = G.$$

ჰაარის ზომა

განსაზღვრება

ვთქვათ, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ არის ტოპოლოგიური სივრცე ზომით. ვიტყვით, რომ μ არის რეგულარული ან რეგულარული ბორელის ზომა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა

- ყოველი $K \subset X$ კომპაქტისთვის, $\mu(K) < \infty$,
- ყოველი $A \in \mathcal{M}$-თვის, $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U$ ღიაა და $A \subset U\}$,
- ყოველი $U \in \mathcal{M}$ ღია სიმრავლისთვის, $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K$ კომპაქტია და $K \subset U\}$.

მეორე თვისებას ეწოდება ზომის გარე რეგულარობა, ხოლო მესამეს - შიდა რეგულარობა.

განსაზღვრება

ვთქვათ, $(G, +)$ არის ტოპოლოგიური ჯგუფი. მარცხენა ჰაარის ზომა (შესაბამისად მარჯვენა ჰაარის ზომა) G-ზე ეწოდება არანულოვან რეგულარულ ბორელის μ ზომას G-ზე რომლისთვისაც $\mu(g + A) = \mu(A)$ (შესაბამისად $\mu(A + g) = \mu(A)$) ყოველი $g \in G$-თვის და ყოველი ზომადი A სიმრავლისათვის G-დან.

ისტორიულად ჰაარის ზომა პირველად წარმოდგენილი იყო ჰაარის მიერ [14] 1933 წელს. მან მოცემულ სტატიაში დაამტკიცა ჰაარის ზომის არსებობა ყოველი ლოკალურად კომპაქტურ ჯგუფისათვის, თვლადობის მეორე აქსიომით. მოცემული შედეგის განზოგადება ნებისმიერ ლოკალურად კომპაქტურ ჯგუფზე ეკუთვნის ვეილს [29], ამორჩევის აქსიომის გამოყენებით. ამორჩევის აქსიომის გამოყენების გარეშე დებულება დამტკიცებული იყო კარტანის [6] და ბრედონის [4] მიერ და გამარტივებული ვერსია ალფსენის მიერ [3]-ში.

ჰაარის ზომა

თეორემა

ვთქვათ $(G, +)$ არის ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფი. მაშინ არსებობს მარჯვენა ჰაარის ზომა G-ზე.

ჰაარის ზომაზე საუბრისას აუცილებელია მითითებული იყოს ის მარჯვენაა თუ მარცხენა რადგან განვასხვავოთ რომელი გადატანის მიმართ არის ინვარიანტული. რადგან თუ ჯგუფი არაა აბელური მაშინ $g + A$ საზოგადოდ არ დაემთხვევა $A + g$-ს. თუმცა შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ მოცემული ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფისთვის მარცხენა ჰაარის ზომის არსებობა ექვივალენტურია მარჯვენა ჰაარის ზომის არსებობის მოცემულ ჯგუფზე.

თეორემა

ვთქვათ, $(G, +)$ არის ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფი და μ და ν არის ორი მარჯვენა ჰაარის ზომა G-ზე. მაშინ არსებობს დადებითი ნამდვილი რიცხვი c ისეთი, რომ $\nu = c\mu$.

ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფის მახასიათებლები

განსაზღვრება

ვთქვათ, $(G,+)$ არის ლოკალურად კომპაქტური აბელის ჯგუფი თუ $\chi : G \to \mathbb{C}$ აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს:

- ყოველი $x_1, x_2 \in G$-თვის $\chi(x_1 + x_2) = \chi(x_1)\chi(x_2)$,
- ყოველი $x \in G$-თვის $|\chi(x)| = 1$.

მაშინ ვიტყვით, რომ χ არის G ჯგუფის მახასიათებელი.

უფრო მეტიც, $\chi : G \to \mathbb{T}$, სადაც

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

და $\mathbb{T}$ არის ერთეულოვანი წრეწირი $\mathbb{C}$ კომპლექსურ სიბრტყეზე, უფრო მეტიც ის წარმოადგენს ჯგუფს გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფის მახასიათებლები

განსაზღვრება

ვთქვათ, $(G, +)$ არის ლოკალურად კომპაქტური აბელის ჯგუფი. შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$\Gamma_G = \{\chi : \chi \text{ არის } G \text{ ჯგუფის უწყვეტი მახასიათებელი}\},$$

შემოვიტანოთ Γ_G-ზე $\times$ ოპერაცია შემდეგნაირად

$$(\chi_1 \times \chi_2)(x) = \chi_1(x)\chi_2(x), \text{ ყოველი } \chi_1, \chi_2 \in \Gamma_G \text{ და ყოველი } x \in G.$$

სიმრავტივისთვის " $\times$ " სიმბოლოს ნაცვლად გამოვიყენებთ " $\cdot$ " სიმბოლოს. ადვილი დასანახია, რომ Γ_G წარმოადგენს აბელის ჯგუფს $\times$ ოპერაციის მიმართ და მას G ჯგუფის **მახასიათებელთა ჯგუფი** ეწოდება ან G ჯგუფის **დუალური** ჯგუფი. ახლა ჩამოვაყალიბოთ პონტრიაგინის დუალობის კარგად ცნობილი თეორემა რომელიც გვაძლევს Γ_G ჯგუფის მნიშვნელოვან დახასიათებას.

ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფის მახასიათებლები

თეორემა

ვთქვათ $(G, +)$ არის ტოპოლოგიური აბელური ჯგუფი რომელიც ასევე არის ჰაუსდორფის. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:

- თუ G არის კომპაქტური ჯგუფი, მაშინ Γ_G წარმოადგენს დისკრეტულ ჯგუფს, და თუ G არის დისკრეტული მაშინ Γ_G არის კომპაქტური.
- თუ G არის ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფი, მაშინ Γ_G არის ლოკალურად კომპაქტური, უფრო მეტიც Γ_G და G არიან ტოპოლოგიურად იზომორფულები, ეს ნიშნავს, რომ ლოკალურად კომპაქტური აბელური ჯგუფი რომელიც ამასთან ერთად არის ჰაუსდორფის თვით შეუღლებადია.

ვილენკინის ჯგუფი

ვთქვათ, $m := \{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ არის დადებითი მთელი რიცხვების მიმდევრობა ისეთი, რომ $m_i \geq 2$, ყოველი $i \in \mathbb{N}$-თვის. $\mathbb{Z}_{m_k} := \{0, 1, \ldots m_k - 1\}$-ით აღვნიშნოთ ნაშთთა კლასი მოდულით m_k. განვსაზღვროთ G_m როგორც მოცემული $\mathbb{Z}_{m_k}$ ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლი, ე.ი

$$G_m = \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_k},$$

ანუ G_m ჯგუფის ელემენტებს აქვს სახე $x = (x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots), x_k \in \mathbb{Z}_{m_k}$. G_m-ზე ოპერაცია განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots) + (b_0, b_1, \ldots, b_n, \ldots) = (a_0 \dot{+} b_0, a_1 \dot{+} b_1, \ldots, a_n \dot{+} b_n, \ldots),$$

სადაც

$$a_k \dot{+} b_k = (a_k + b_k) mod(m_k),$$

ვილენკინის ჯგუფი

ტოპოლოგია G_m-ზე მოიცემა ერთმანეთში ჩალაგებული ქვეჯგუფების საშუალებით

$$I_0 = G, \quad I_k = \prod_{i=0}^{k-1} \{0\} \times \prod_{i=k}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

ცხადია, გვაქვს ჩალაგება

$$G = I_0 \supset I_1 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots.$$

G_m ზემოთ მოყვანილი ტოპოლოგიით და შეკრების ოპერაციით წარმოადგენს კომპაქტურ აბელურ ტოპოლოგიურ ჯგუფს (იხ. [2]), რომელსაც **ვილენკინის ჯგუფი** ეწოდება.

p-ადიკურ რიცხვთა ველი

ახლა ავაგოთ ნულგანზომილებიანი კომპაქტური ტოპოლოგიური აბელირი ჯგუფი, რომელიც განსხვავდება ციკლური ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლისაგან. ვთქვათ p არის მარტივი რიცხვი და $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, სადაც $\mathbb{Q}$ რაციონალური რიცხვების სიმრავლე. ვთქვათ, x ისეთია, რომ სამართლია შემდეგი წარმოდგენა $x = p^{\gamma(x)}\frac{m}{n}$, სადაც $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ და $m, n \in \mathbb{Z}$ არცერთი არ იყოფა p-ზე, მაშინ $|x|_p := p^{-\gamma(x)}$. როცა $x = 0$ მაშინ $|0|_p = 0$. $|x|_p$ სიდიდეს აქვს მოდულის ყველა თვისება, ასევე ადგილი აქვს ტოლობას $|xy|_p = |x|_p|y|_p$. დამატებით $|\cdot|_p$-ს გააჩნია შემდეგი თვისება

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p). \tag{1}$$

$\mathbb{Q}_p$ ველი განისაზღვრება როგორც $\mathbb{Q}$-ს გასრულება $|\cdot|_p$ ნორმის მიმართ. ყოველი $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, ერთადერთი გზით წარმოდგება შემდეგი სახით

$$x = p^{\gamma}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \ldots + x_k p^k + \ldots), \tag{2}$$

სადაც $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$, და $0 \leq x_j \leq p-1, j \in \mathbb{Z}_+$, და $x_0 \neq 0$. (2) წარმოდგენიდან გვაქვს, რომ $|x|_p = p^{-\gamma}$. $\mathbb{Q}_p$ არის ველი და $|x|_p$ ველის მოდული $\mathbb{Q}_p$-ზე, რომლისთვისაც შესრულებულია (1). $x, y \in \mathbb{Q}_p$ ელემენტების შეკრება განისაზღვრება შემდეგნაირად, ვთქვათ

$$x = \sum_{k=\alpha}^{\infty} a_k p^k, \quad y = \sum_{k=\beta}^{\infty} b_k p^k,$$

მაშინ

$$x + y = \sum_{k=\gamma}^{\infty} c_k p^k, \quad \gamma = \min(\alpha, \beta),$$

სადაც

$$\sum_{k=\alpha}^{n} a_k p^k + \sum_{k=\gamma}^{n} b_k p^k = \sum_{k=\gamma}^{n} c_k p^k \; (mod\; p^{n+1}), \quad \forall n \geq \gamma.$$

$\mathbb{Q}_p$ ველი არის კომუტაციური ჯგუფი მოცემული შეკრების ოპერაციის მიმართ.

p-ადიკურ რიცხვთა ველი

ვთქვათ $B_k(x_0) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - x_0| \leq p^k\}$. მაშინ $B_k = B_k(0)$ არის ღია და კომპაქტური ჯგუფი შეკრების მიმართ. $B_k = B_k(0)$ წარმოქმნის ნულის მიდამოთა ბაზას. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\mathbb{Z}_p := B_0$. $\mathbb{Z}_p$-ს ეწოდება p-ადიკურ მთელ რიცხვთა ჯგუფი. შევნიშნოთ, რომ B_k ქმნის ერთმანეთში ჩალაგებულ ქვეჯგუფთა მიმდევრობას. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\mathbb{Z}_p$ არის ნულგანზომილებიანი ჯგუფი ზემოთ მოყვანილი ოპერაციის მიმართ. რადგან $\mathbb{Q}_p$ არის ლოკალურად კომპაქტური აბელური ჯგუფი (იხ. [2]) ამიტომ არსებობს ჰაარის ზომა μ ისეთი, რომ $\mu(B_0) = \mu(\mathbb{Z}_p) = 1$.

- Kedlaya, Kiran S. p-adic Differential Equations. Cambridge University Press, 2022.
- Qiu, Hua. Gibbs–Butzer derivatives over p-adic fields. Applicable Analysis 90.3-4 (2011): 545-561.
- Brekke, Lee, and Peter GO Freund. p-adic numbers in physics. Physics Reports 233.1 (1993): 1-66.

ვილენკინის ჯგუფი

G_m-ში ღია სიმრავლეებით მოჭიმული ბორელის σ-ალგებრა აღვნიშნოთ $\mathcal{B}(G_m)$-ით. თეორემა 9-ის ძალით არსებობს ერთადერთი ჰაარის $\mu : \mathcal{B}(G_m) \to [0, \infty]$ ზომა G_m ისეთი, რომ $\mu(G_m) = 1$. მარტივი საჩვენებელია, რომ $\mu(I_n(x)) = 1/M_n$ (იხ. [23]). განვსაზღვროთ, რიცხვთა განზოგადებული სისტემა m-ის საშუალებით შემდეგნაირად:

$$M_0 := 1, M_{k+1} := m_k M_k \ \ (k \in \mathbb{N}),$$

მაშინ ყოველი $n \in \mathbb{N}$ ერთადერთი გზით შეიძლება წარმოდგეს შემდეგი სახით:

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j M_j, \ \ n_j \in Z_{m_j} (j \in \mathbb{N}_+)$$

და მხოლოდ სასრული რაოდებნობა n_j-ის განსხვავდება ნულისაგან.

ახლა განვიხილოთ G_m-ზე ორთონორმირებული სისტემა რომელსაც ეწოდება **ვილენკინის სისტემა.** პირველ რიგში განვსაზღვროთ კომპლექსურ მნიშვნელობებიანი ფუნქიცა $r_k(x) : G_m \to C$, რომელსაც რადემახერის განზოგადებული ფუნქცია ეწოდება შემდეგნაირად:

$$r_k(x) := \exp(2\pi i x_k / m_k) \ \left(i^2 = -1, x \in G_m, k \in \mathbb{N}\right).$$

განვსაზღვროთ **ვილენკინის სისტემა** $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$, G_m-ზე შემდეგნაირად:

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x) \ \ (n \in \mathbb{N}).$$

მაშინ როცა $m \equiv 2$. მაშინ მოცემულ სისტემას ჩვენ უოლშ-პელის სისტემას ვუწოდებთ.
ვილენკინის სისტემა ორთონორმირებულია და სრულია $L_2(G_m)$-ში.

$S_n f\,, \sigma_n f$

ვთქვათ, $f \in L^1(G_m)$, განვსაზღვროთ f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები, დირიხლეს გული და ფურიეს მწკრივის კერძო ჯამები ვილენკინის სისტემის

$$\begin{aligned} \widehat{f}(k) &:= \int_{G_m} f\overline{\psi}_k d\mu, \quad (k \in \mathbb{N}), \\ S_n f &:= \sum_{k=0}^{n-1} \widehat{f}(k)\,\psi_k, \quad (n \in \mathbb{N}_+,\ S_0 f := 0), \\ D_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k, \qquad (n \in \mathbb{N}_+). \end{aligned}$$

ვთქვათ, $\{m_i\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. ვატარიმ [19] აჩვენა, რომ თუ $f \in L^p(G_m), 1 < p < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{G_m} |S_n f - f|^p \, d\mu = 0.$$

იუნგმა [31], შიფმა [25] და საიმონმა [26] დამოუკიდებლად აჩვენეს, რომ ვილენკინ-ფურიეს მწკრივის n-ური რიგის კერძო ჯამები ნორმით კრებადია მაშინაც კი როდესაც $\{m_i\}$ მიმდევრობა შემოუსაზღვრელია.
ვიტყვით, რომ ω არის წონა G_m-ზე თუ ω არის ზომადი და $0 < \omega(x) < \infty$ თითქმის ყველგან. $L^p_\omega(G_m), 1 \leq p < \infty$-თი აღვნიშნოთ ყველა $f : G_m \to \mathbb{C}$ ზომად ფუნქციათა ერთობლიობა G_m-ზე, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{p,\omega} = \left(\int_G |f|^p \omega \, d\mu\right)^{1/p} < \infty,$$

მოცემული სივრცე წარმოადგენს ბანახის სივრცეს $\|f\|_{p,\omega}$ ნორმით.

განსაზღვრება

(i) ვიტყვით, რომ ω აკმაყოფილებს $A_p(G_m)$ პირობას, $1 < p < \infty$, თუ

$$[\omega]_{A_p} = \sup_{i\in\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\mu(I)}\int_I \omega\, d\mu\right)\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_I \omega^{-1/(p-1)}\, d\mu\right)^{p-1} < \infty. \tag{3}$$

(ii) იტყვით, რომ ω აკმაყოფილებს $A_1(G_m)$ პირობას თუ

$$[\omega]_{A_1} = \sup_{i\in\mathcal{F}} \frac{1}{\mu(I)}\int_I \omega\, d\mu(\operatorname*{essinf}_I \omega(x))^{-1} < \infty.$$

როცა $\omega(x) = 1, x \in G_m$, მაშინ ვიღებთ კლასიკურ $L^p(G_m)$ ლებეგის სივრცეს. მარტივი დასანახია, რომ, თუ $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p(G_m)$ მაშინ $L^p_\omega(G_m) \subset L^1(G_m)$. ვთქვათ, $\omega \in A_p(G_m), 1 \leq p < \infty$, და $p < q < \infty$ მაშინ $\omega \in A_q(G_m)$.

$L^p_\omega(G_m)$, $L^{p(\cdot)}(G_m)$ სივრცეები და ვილენკინის სისტემა

მოვიყვანოთ ცვლად მაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცის განსაზღვრება. ვთქვათ, $p(\cdot) : G_m \to [1, \infty)$ არის ზომადი ფუნქცია. ცვლად მაჩვენებლიანი $L^{p(\cdot)}(G_m)$ ლებეგის სივრცე არის ყველა ზომადი ფუნქციების ერთობლიობა ისეთი, რომ რაიმე $\lambda > 0$-თვის

$$\rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) = \int_{G_m} (|f(x)|/\lambda)^{p(x)}\, d\mu < \infty.$$

$L^{p(\cdot)}(G_m)$ წარმოადგენს ბანახის სივრცეს ლუქსემბურგის ნორმით

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leq 1\}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები: $p_-(I) = \operatorname{essinf}_{x\in I} p(x)$ და $p_+(I) = \operatorname{esssup}_{x\in I} p(x)$, სადაც $I \subset G_m$. თუ $I = G_m$ მაშინ სიმარტივისთვის გამოვიყენებთ აღნიშვნებს p_-, p_+. $p'(\cdot)$ აღნიშნავს $p(\cdot)$ ფუნქციის შეუღლებულ ფუნქციას ე.ი $1/p(x) + 1/p'(x) = 1\ (x \in G_m)$. მოცემულ ნაშრომში C, c აღნიშნავს აბსოლუტურ მუდმივებს და შეიძლება განსხვავდებოდეს კონტექსტის მიხედვით, χ_A აღნიშნავს A სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას.

$L^p_\omega(G_m)$, $L^{p(\cdot)}(G_m)$ სივრცეები და ვილენკინის სისტემა

განსაზღვრება

ვიტყვით, რომ $p(\cdot)$ მაჩვენებელი, $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ აკმაყოფილებს $\mathscr{A}(G_m)$ პირობას, თუ არსებობს მუდმივი C ისეთი, რომ ყოველი $I \in \mathcal{F}$-თვის,

$$\frac{1}{\mu(I)} \|\chi_I\|_{p(\cdot)} \|\chi_I\|_{p'(\cdot)} \leq C. \tag{4}$$

[1]-ში კოპალიანმა და ადამაძემ დაახასათეს ყველა ყველა $p(\cdot)$ მაჩვენებელი ისეთი, რომ თუ $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$, მაშინ $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ ფუნქციის ვილენკინ-ფურიეს მწკრივის $S_n f$ კერძო ჯამები კრებადია f-სკენ $L^{p(\cdot)}(G_m)$-ის ნორმით. კერძოდ სამართლიანია შემდეგი თეორემა

თეორემა

ვთქვათ, $p(\cdot)$ მაჩვენებელი ისეთია, რომ $1 < p_- \leq p_+ < \infty$. მაშინ შემდეგი წინადადებები ექვივალენტურია:
(i) $p(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m)$,
(ii) არსებობს მუდმივი C დამოკიდებული მხოლოდ $p(\cdot)$-ზე ისეთი, რომ ყოველი $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$-თვის გვაქვს:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n f\|_{p(\cdot)} \leq C\|f\|_{p(\cdot)},$$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \|f - S_n f\|_{p(\cdot)} = 0$, ყოველი $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$-თვის.

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E_n(f)_{p(\cdot)} = \inf\left\{\left\|f - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\psi_k\right\|_{p(\cdot)} : a_k \in \mathbb{C}\right\}, n \in \mathbb{N}.$$

$L^p_\omega(G_m)$, $L^{p(\cdot)}(G_m)$ სივრცეები და ვილენკინის სისტემა

ვთქვათ, G არის უოლშის (კანტორის) ჯგუფი. $X(G) \subset L^1(G)$ იყოს ბანახის სივრცე ისეთი, რომ უოლშის სისტემის წრფივი გარსი მკვრივია $X(G)$-ში. ბუცერმა და ვაგნერმა [5]-ში შემოიღეს $f \in X(G)$ ფუნქციის $D^{(1)}(f)$ ძლიერი წარმოებული. შემოვიღოთ აღნიშვნა $e_j = (x_0, x_1, \dots), x_j = 1, x_i = 0$, როცა $i \neq j$.

განსაზღვრება

ვთქვათ, $f \in X(G)$. ვიტყვით, რომ f-ს გააჩნია ძლიერი წარმოებული, თუ არსებობს $g \in X(G)$ ფუნქცია ისეთი, რომ

$$\lim_{n\to\infty} \left\| 2^{-1} \sum_{j=0}^{n} 2^j [f(\cdot) - f(\cdot + e_{j+1})] - g(\cdot) \right\|_X = 0,$$

ასეთ g ფუნქციას ეწოდება f ფუნქციის ორობითი ძლიერი წარმოებული და მას აღვნიშნავთ $D_X^{(1)}(f)$-ით.

[5]-ში დამტკიცებულია შემდეგი ტოლობა $D_X^{(1)}(\psi_k) = k\psi_k, k \in \mathbb{N}_+$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ψ_k წარმოადგენს $D_X^{(1)}$ ოპერატორის საკუთრივ ფუნქციას. იგივე სტატიაში განსაზღვრულია $f \in X(G)$ ფუნქციის ძლიერი რიგის ინტეგრალი $I^{(r)}(f)$ შემდეგნაირად: შემოვიღოთ აღნიშვნა $W_r = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\psi_k$. მაშინ $f * W_r$-ს ეწოდება f ფუნქციის r-რიგის ორობითი ინტეგრალი. ასევე [**?**]-ში დამტკიცებულია შემდეგი ფორმულების სამართლიანობა $D_X^{(1)}(I_X^{(1)}(f)) = f$ და $I_X^{(1)}(D_X^{(1)}(f)) = f$, როცა ფრჩხილებს შიგნით მოთავსებული გამოსახულება არსებობს და $\hat{f}(0) = 0$.

- Su, Weiyi, and Hua Qiu. p-adic calculus and its applications to fractal analysis and medical science. Facta universitatis-series: Electronics and Energetics 21.3 (2008): 339-347.

$L^p_\omega(G_m)$, $L^{p(\cdot)}(G_m)$ სივრცეები და ვილენკინის სისტემა

ონევიერმა [21]-ში ზემოთ მოყვანილი წარმოებულის განსაზღვრება განაზოგადა ვილენკინის ჯგუფებზე.

განსაზღვრება

ვთქვათ $f \in X(G_m)$ და არსებობს ფუნქცია $g \in X(G_m)$ ისეთი, რომ

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\sum_{j=0}^{n} m_j \sum_{k=0}^{M_{j+1}-1} kM_{j+1}^{-1} \sum_{l=0}^{M_{j+1}-1} \exp^{-lk}(2\pi i/M_{j+1})(f(\cdot + le_{j+1}) - f(\cdot)) - g(\cdot)\right\|_X = 0,$$

მაშინ g-ს ეწოდება f ფუნქციის ძლიერი წარმოებული $X(G_m)$-ში.

[21]-ში დამტკიცებულია ტოლობა $D^{(1)}(\psi_k) = k\psi_k$ და შესწავლილია წარმოებულის გარკვეული თვისებები. ონევიერმა [22]-ში შემოიღო მოდიფიცირებული ორობითი წარმოებული $f^{[1]}$ შემდეგი თვისებით: $\psi_k^{[1]} = 2^{[\log_2 k]}\psi_k$. ასევე მან აჩვენა, რომ $D^{(1)}$ და $D^{[1]}$ ოპერატორის განსაზღვრის არეები ემთხვევა.

ზელინმა [32]-ში შემოგვთავაზა P - წარმოებულისა და ინტეგრალის განსაზღვრება , რომელიც უფრო მარტივია ვიდრე ბუცერ-ვაგნერისა და ონევიერის განასზღვრებები.

განსაზღვრება

ვთქვათ,
$f \in X(G_m), \alpha \in \mathbb{R}$, $T_r^\alpha = \sum_{k=0}^{M_r-1} k^\alpha \psi_k$, სადაც $0^\alpha = 1$, როცა $\alpha \leq 0$. თუ

$$\lim_{r\to\infty} \|T_r^\alpha * f - g\|_X = 0,$$

მაშინ $\alpha > 0$-თვის $g = T_X^{(\alpha)}(f)$-ს ეწოდება f ფუნქციის α რიგის (ძლიერი) წარმოებული და $\alpha < 0$-თვის $g = T_X^{(\alpha)}(f)$-ს ეწოდება f ფუნქციის $|\alpha|$ რიგის (ძლიერი) ინტეგრალი.

ახლა რადგან

$$S_{M_n}(f)(x) = \frac{1}{|I_n(x)|}\int_{I_n(x)} f(t)\,d\mu,$$

$X(G_m) = L^p(G_m), 1 < p < \infty$. შემთხვევაში გვაქვს: $f \in L^p(G_m)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\|S_{M_n}(f)\|_p \leq C$. სადაც C არაა დამოკიდებული n-ზე. შესაბამისად f ფუნქციის α რიგის წარმოებულის არსებობა ექვივალენტურია იმის, რომ $\sum_{k=0}^{\infty} k^\alpha \hat{f}(k)\psi_k$ მწკრივი წარმოადგენს $g \in L^p(G_m)$ ფუნქციის ვილენკინ-ფურიეს მწკრივს. მოცემული სამაგისრო ნაშრომი შეეხება ზელინის მიერ შემორებულ წარმოებულს, რომელიც აღნიშნული იქნება $f^{[r]}$-ით.

ძირითადი შედეგები

თეორემა

ვთქვათ, $f \in L^1(G_m)$ და $p(\cdot)$ მაჩვენებელი ისეთია, რომ $1 < p_- \leq p_+ < \infty$, და M მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია $L^{p(\cdot)}(G_m)$-ში, ამასთან

$$Q(f) = \left(|\hat{f}(0)|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |S_{M_{n+1}}(f) - S_{M_n}(f)|^2 \right)^{1/2},$$

მაშინ $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Q(f) \in L^{p(\cdot)}(G_m)$, და $\|Q(f)\|_{p(\cdot)} \asymp \|f\|_{p(\cdot)}, f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$.

ძირითადი შედეგები

ლემა

ვთქვათ $g=\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, სადაც $g_k\in L^{p(\cdot)}(G_m), k\in\mathbb{N}_+, 2\leq p(\cdot)<\infty$ და $1\leq q<\infty$, ამასთან

$$\|g\|_{L^{p(\cdot)}(l^q)}=\left\|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|g_k|^q\right)^{1/q}\right\|_{p(\cdot)},\quad \|g\|_{l^q(L^{p(\cdot)})}=\left(\sum_{k=1}^{\infty}\|g_k\|_{p(\cdot)}^q\right)^{1/q}.$$

მაშინ $\|g\|_{L^{p(\cdot)}(l^2)}\leq\|g\|_{l^2(L^{p(\cdot)})}$, როცა $p(\cdot)\geq 2$.

სამართლიანია ჯექსონის თეორემის ანალოგი ცვლად მაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეებისთვის.

თეორემა

ვთქვათ, $p(\cdot)$ მაჩვენებელი ისეთია, რომ $1 < p_- \le p_+ < \infty$, $p(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m)$, $r \in \mathbb{N}_+$, და $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$-თვის არსებობს $f^{[r]} \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ მაშინ

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \le Cn^{-r}\|f^{[r]}\|_{p(\cdot)}.$$

ძირითადი შედეგები

ვიტყვით, რომ $f \in \mathscr{P}_n$ თუ $f \in L^1(G_m)$ და $\hat{f}(k) = 0$ როცა $k \geq n$. ადგილი აქვს ბერშტეინის თეორემის ანალოგს ცვლად მაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში.

თეორემა

ვთქვათ, $p(\cdot)$ მაჩვენებელი ისეთია, რომ $1 < p_- \leq p_+ < \infty$, $p(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m)$, $r \in \mathbb{N}_+$ და $t_n \in \mathscr{P}_n$ მაშინ $\|t_n^{[r]}\|_{p(\cdot)} \leq C_{p(\cdot)} n^r \|t_n\|_{p(\cdot)}$.

თეორემა

ვთქვათ, $p(\cdot)$ მაჩვენებელი ისეთია, რომ $p(\cdot) \in [2, \infty)$, $p(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m)$, $r \in \mathbb{N}_+$ და $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$, თუ $\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r-1} E_k^2(f)_{p(\cdot)}$ კრებადია მაშინ არსებობს $f^{[r]} \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ და ასევე

$$E_n(f^{[r]})_{p(\cdot)} \leq C \left[n^r E_n(f)_{p(\cdot)} + \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} k^{2r-1} E_k^2(f)_{p(\cdot)} \right)^{1/2} \right].$$

ვთქვათ, $p(\cdot)$ მაჩვენებელი ისეთია, რომ
$1 < p_- \leq p_+ < \infty$, $p(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m), r \in \mathbb{N}$. $W^r L^{p(\cdot)}(G_m)$-ით აღვნიშნოთ ყველა ისეთ $g \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ ფუნქიცათა ერთობლიობა, რომლისთვისაც $g^{[r]} \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ შემდეგი $\|g^{[r]}\|_{p(\cdot)}$ ნახევარ-ნორმით. განვიხილოთ K-ფუნქციონალი განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$K_r(f,t) = \inf\left\{\|f-g\|_{p(\cdot)} + t\|g^{[r]}\|_{p(\cdot)} : g \in W^r L^{p(\cdot)}(G_m)\right\}.$$

სამართლიანია შემდეგი პირდაპირი და შებრუნებული აპროქსიმაციის თეორემები $K_r(f,t)$ ფუნქციონალის ტერმინებში.

ძირითადი შედეგები

თეორემა

ვთქვათ $p(\cdot)$ მაჩვენებელი ისეთია, რომ $p(\cdot) \in [2, \infty)$, $p(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m)$, მაშინ ყოველი $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ და $n \in \mathbb{N}$-თვის გვაქვს

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq CK_r(f, n^{-r}), \tag{5}$$

და

$$K_r(f, n^{-r}) \leq Cn^{-r} \left(\sum_{k=1}^{n} [k^r E_k(f)_{p(\cdot)}]^2 k^{-1} \right)^{1/2}. \tag{6}$$

- Adamadze D. and Kopaliani T. *Vilenkin-Fourier series in variable Lebesgue spaces*, Vol 26, **4**, 977-993, (2023).
- Agaev G., Vilenkin N., Dzahafarly G. and Rubinstein A., *Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups*, Baku, Ehim, (1981).
- Alfsen E., *A simplified constructive proof of existence and uniqueness of haar measure*, Mathematica Scandinavica, **12** (1963), 106–116.
- Bredon G., *A new treatment of the Haar integral*, The Michigan Mathematical Journal, **10** (1963), 365–373.
- Butzer, P., and Wagner J. *Walsh-Fourier Series and the Concept of a Derivative*, Applicable Ana **3** (1973): 29-46.
- Cartan H., *Sur la mesure de haar*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **211** (1940), 759-762.

- Cruz-Uribe D., Fiorenza A., Martell J.M. and Pérez C., *The boundedness of classical operators on variable L^p spaces*, Ann. Acad.Sci. Fen. Math. **31**(1): 239-264, 2006.
- Cruz-Uribe D. and Fiorenza A., *Variable Lebesgue Spaces, Foundations and Harmonic Analysis*, Birkhauser, Basel (2013).
- Cruz-Uribe D., Martell J.M. and Pérez C., *Weights, extrapolation and theory of Rubio de Francia*, Operator Theory: Advances and Applications, 2015, Birkhauser/Springer Basel AG, Basel, (2011).
- Diening L., Harjulehto P., Hästö P. and Růžička M., *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Lecture Notes in Mathematics, 2017. Springer, Heidelberg (2011).
- Dzhafarli G. M., “On multiplicative orthonormal systems of functions closed under the taking the root operation,” Izv. AN Azerb. SSR **6**, 11–23 (1961) [in Russian].

ლიტერატურა III

- Folland G. B., *Real analysis: modern techniques and their applications*. Vol. **40**. John Wiley & Sons, (1999).
- Gosselin J. A., *A weighted norm inequality for Vilenkin-Fourier series*, Proc. Amer. Math. Soc. **49** (1975), 349-353.
- Haar A., *Der massbegriff in der theorie der kontinuierlichen gruppen*, Annals of Mathematics, **34** (1933), 147-169.
- Jiao Y., Weisz F., Wu L. and Zhou D., *Variable martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis*, Dissertationes Math. **550** (2020) pp. 1-67.
- Kopaliani T., *Infimal convolution and Muckenhoupt $A_p(\cdot)$ condition in variable L^p spaces*, Arch. Math. (Basel), **89** (2):185–192, (2007).

- Králik, D. *Über die approximationstheoretische Charakterisierung gewisser Funktionenklassen mit Hilfe der Rieszschen Mittel von Fourierreihen*. Acta Math. Acad. Sci. Hun. **20**, 361–373 (1969).
- Lerner A. K., *On some questions related to the maximal operator on variable L^p spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **362** (8):4229-4242, (2010).
- Muckenhoupt B., *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207-251.
- Neumann J. V., *Die einfuhrung analytischer parameter in topologischen gruppen*, Annals of Mathematics **34** (1933), 170–179.
- Onneweer, C. W. *Differentiability for Rademacher series on groups*, Acta Sci. Math.(Szeged) **39**, 1-2 (1977): 121-128.

- Onneweer, C. W., and Butzer, P. L., *On the definition of dyadic differentiation*, Applicable Analysis, 9(4), 267–278, (1979).
- Persson L.-E., Tephnadze G. and Weisz F., *Martingale Hardy Spaces and Summability of one-dimenional Vilenkin-Fourier Series*, Birkhäuser/Springer, (2022).
- Pontryagin L. S., *Continuous Groups* [in Russian], Gostekhizdat, Moscow (1954).
- Schipp F., *On L^p -convergence of series with respect to product systems*, Analysis Mathematica, **2** (1976), 49-64.
- Simon P., *Verallgemeinerte Walsh-Fourierreihen*, II, Acta Math.Acad. Sci. Hungar. **27** (1976), 49-64.
- Simon P., *On a maximal function*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **21** (1978), 41-44.

- Volosivets S. S., *Approximation by polynomials with respect to multiplicative systems in weighted L^p-spaces*, Sib. Math. J. Vol. **56**, No1, pp. 68-77, (2015).
- Weil A., *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, (1938).
- Young W-S., *Weighted norm inequalities for Vilenkin-Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), 273–291.
- Young W-S., *Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **218** (1976), 311-320.
- Zelin, He. *The derivatives and integrals of fractional order in Walsh-Fourier analysis, with applications to approximation theory*, Journal of Approximation Theory **39** (1983): 361-373.