ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,

მათემატიკის დეპარტამენტი

სამაგისტრო პროგრამის სახელწოდება: მათემატიკა

თინათინ ჭოველიძე

ლამეს განტოლების მონოდრომიის ჯგუფის შესახებ

მათემატიკაში მაგისტრის ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი ნაშრომი

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:

გრიგორი გიორგაძე - ფიზ.-მათ. მეცნ. დოქტორი,

ასოცირებული პროფესორი

გეგა გულაღაშვილი - აკადემიური დოქტორი,

ილია ვეკუას სახელობის

გამოყენებითი მათემატიკის ისტიტუტის

მენციერ თანამშრომელი

თბილისი 2024

ს ა რ ჩ ე ვ ი

ანოტაცია

ნაშრომში აღწერილია ოთხი რეგულარული განსაკუთრბეული წერტილის მქონე დიფერენციალური განტოლების მონოდრომიის ჯგუფი, როდესაც განტოლების ლოკალური ექსპონენტები ფიქსირებულია. ასეთი განტოლების კანონიკური სახე, როგორც ცნობილია, არის ლამეს განტოლება. ლამეს განტოლება შეიცავს ერთ აქსესორულ პარამეტრს და ამრიგად, განტოლების მონოდრმიის ჯგუფი დამოკიდებულია ამ პარამეტრზე.

ნაშრომში აღწერილია პარამეტრზე დამოკიდებული მონოდრომიის ჯგუფები და ნაჩვენებია, რომ ისინი წარმოქმნილია არეკვლებისაგან. გარდა ამისა, მიღებულია იმის პირობა, თუ აქსესორული პარამეტრის რა მნიშვნელობისათვის არის მონოდრომიის ჯგუფი უნიტარული.

Resume

In the manuscript describes the monodromy group of a differential equation with four regular singular points, where the local exponents of the equation are fixed. The canonical form of such an equation is known as the Lamé equation. The Lamé equation contains one accessory parameter, and thus, the monodromy group of the equation depends on this parameter.

The manuscript describes the parameter-dependent monodromy groups and shown that they are generated by reflections. Additionally, a condition is obtained for the value of the accessory parameter for which the monodromy group is unitary.

შესავალი

მსჯელობა დავიწყოთ მაგალითების განხილვით იმისათვის, რომ კარგად დავინახოთ შემდგომის მსჯელობის საგანი. პირველად განვიხლილოთ მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება:

მაგალითი1: შემდეგი მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლების

$$z^2y'' + \frac{1}{6}zy' + \frac{1}{6}y = 0,$$

კოეფიციენტები არიან z-ის პოლინომები: z^2, $\frac{1}{6}z$ და $\frac{1}{6}$, ხოლო ამონახსნები კი არიან ფუნქციები $z^{\frac{1}{2}}$ და $z^{\frac{1}{3}}$. აქედან გამომდინარე $\mathbb{B} = \left[z^{\frac{1}{2}}, z^{\frac{1}{3}}\right]$ ვექტორ ფუნქცია არის განსახილველი განტოლების ამონახსნთა სივრცის ბაზისი. $z^{\frac{1}{2}}$ და $z^{\frac{1}{3}}$ ამონახსნებიდან თითოეული შეიძლება გავაგძელოთ ანალიზურად 0 წერტილის გარშემო მთლიან კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეზე. თითოეული მათგანის საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით ორიენტირებული მარტივი შეკრული წირის გასწვრივ გაგრძელების შემთხვევაში მიიღება ახალი, ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი $\widetilde{\mathbb{B}} = \left[z^{\frac{1}{2}}, e^{\frac{2\pi i}{3}}z^{\frac{1}{3}}\right]$. $\mathbb{B}$ საწყისი და $\widetilde{\mathbb{B}}$ მარტივი შეკრული წირის გასწვრივ გაგრძელების შედეგად მიღებული ამონახსებისაგან შედგენილი ვექტორ ფუნქციები ერთმანეთთან დაკავშირებულია ტოლობით

$$\widetilde{\mathbb{B}} = \mathbb{B}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix},$$

სადაც $\gamma = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & e^{\frac{2\pi i}{3}} \end{pmatrix}$ მუდმივი გადაუგვარებელი მატრიცაა. აღნიშნულის მსგავსად ჩვენ შეგვიძლია განვიხილოთ მარტივი შეკრული წირები 0 წერტილის გარშემო და თითოეულის მიმართ ანალიზურად გავაგრძელოთ საწყისი განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები. გაგრძელების თითოეული წირის შემთხვევაში საწყისი და გაგრძელების შედეგად მიღებული ამონახსნები ერთმანეთთან დაკავშირდებიან γ^n მატრიცით, სადაც n არის

0 წერტილის გარშემო წირების შემოვლების რაოდენობა. ამრიგად მიიღება γ გადაუგარებელი მუდმივი მატრიცით წარმოქმნილი ჯგუფი, რომელსაც განსახილველი განტოლების მონოდრომიის ჯგუფი ეწოდება. $z^{\frac{1}{2}}$ და $z^{\frac{1}{3}}$ განსახილველი განტოლების ამონახსნები არიან $x^2 - z$ და $x^3 - z$ პოლინომების ფესვები შესაბამისად.

მაგალითი2: ახლა განვიხილოთ მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება

$$z^2y'' - zy' + y = 0.$$

ამ განტოლების კოეფიციენტები არიან z-ის პოლინომები: z^2, $-z$ და 1, ხოლო ამონახსნები კი არიან ფუნქციები - z და zlog(z), ხოლო $\mathbb{B} = [z, z\log(z)]$ ვექტორ ფუნქცია ვექტორ გამოდის განსახილველი განტოლების ამონახსნთა სივრცის ბაზისი. zlog(z) ლოგარითმული ამონახსნი არ არის ალგებრული ამონახსნი. პირველი განსახილველი მაგალითი არის ალგებრული დიფერენციაულური განტოლების მაგალითი, ხოლო მეორე არა.

როგორც წინა შემთხვევაში აქაც შეგვიძლია განვიხილოთ ამონახსნების ანალიზური გაგრძელებები წირების გასწვრივ 0 წერტილის გარშემო. ამ გაგრძელების შედეგად z ამონახსნი არ შეიცვლება, ხოლო log(z) ფუნქცია შეიცვლება $\log(z) + 2\pi ki$ რომელიღაც შტოთი, შესაბამისად zlog(z) ამონახსნი შეიცვლება $z(\log(z) + 2\pi ki) = z\log(z) + 2\pi kiz$ ამონახსნით და აქედან გამომდინარე გაგრძელების შედეგად მიღებული ვექტორ ფუნქცია იქნება შემდეგი სახის: $\widetilde{\mathbb{B}} = [z, z\log(z) + 2\pi kiz]$, რომელიც საწყის ვექტორ ფუნქციასთან დაკავშირებულია ტოლობით

$$\widetilde{\mathbb{B}} = \mathbb{B}\begin{pmatrix} 1 & 2\pi ki \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{Z}.$$

$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi ki \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ მუდმივი გადაუგვარებელი მატრიცა არის $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 2\pi ki \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$ მატრიცთა ჯგუფის წევრი, რომელიც განსახილველი განტოლების მონოდრომიის ჯგუფია.

პირველ შემთხვევაში ალგებრული განტოლებისაგან წარმოქმნილი მონოდრომიის ჯგუფი არის სასრული, ხოლო მეორე შემთხვევაში არა ალგებული განტოლებისაგან წარმოქმნილი მონომოდრომიის ჯგუფი კი არაა სასრული ჯგუფი.

ჩვენი განხილული ორივე მაგალითი მიეკუთვნება მეორე რიგის ეილერის განტოლებების ოჯახს, რომლებიც ზოგადი სახეც ასეთია

$$z^2y'' - azy' + by = 0,$$

სადაც $a, b \in \mathbb{C}$. უფროსი წევრის კოეფიციენტს აქვს $z = 0$ მხოლოდ ერთი ორჯერადი ფესვი. ამასთანავე ∞ წერტილი, $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ კომპლექსური პროექციული სივრცის ელემენტი არის ეილერის განტოლების განსაკუთრებული (სინგულარული) წერტილი. თუ ეილერის განტოლება ალგებრულია, მაშინ მისი ამონახსნთა სივრცე წარმოქმნილია z^{ρ_1} და z^{ρ_2} ფუნქციებისაგან, სადაც ρ_1 და ρ_2 არიან $x^2 + (a-1)x + b$ პოლინომის რაციონალური ფესვები. კერძოდ ეს გამომდინარეობს იქინდა, რომ ამ შემთხვევაში a და b არიან რაციონალური რიცხვები.

მეორე რიგის ფუქსის განტოლების მნიშვენოლოვანი ქვეკლასია ჰიპერგეომეტრიული განტოლება, რომელიც მოიცემა შემდეგი სახით:

$$z(z-1)y'' + \big((a+b+1)z - c\big)y' + aby = 0,$$

სადაც $a,\ b,\ c\ \in \mathbb{R}$. ცნობილი ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია

$$F(a,\ b,\ c \mid z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n n!} z^n$$

არის პიპერგეომეტრიული განტოლების ამონახსნი, სადაც $(x)_n = x(x+1)\dots(x+n-1),\ n > 0$ და $(x)_n = 1, n = 0$. ამ განტოლების განსაკუთრებული წერტილებია $0,\ 1,\ \infty$.

ჩვენ განვიხილავთ ლამეს განტოლებისაგან ინდუცირებულ ლოკალურ და გლობალურ მონოდრომიებს, რომელიც მეორე რიგის ფუქსის განტოლების კერძო შემთხვევაა და მოიცემა შემდეგი სახით:

$$p(z)y'' + \frac{1}{2}p'(z)y' - (n(n+1)z + B)y = 0,$$

$$p(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 4\prod_{i=1}^{3}(z - z_i)\,;$$

$n \in \mathbb{Q}$, $g_2,\ g_3,\ B,\ z_1,\ z_2,\ z_3 \in \mathbb{C}$, ხოლო $p(z)$- პოლინომია.

თავი I. საბაზისო ცნებები

1. 1. რეგულარული განსაკუთრებული წერტილების მქონე წრფივი დიფერენციალური განტოლებები კომპლექსურ სიბრტყეზე

განვიხილოთ $f: \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ კომპლექსური ცვლადის კომპლექსურ მნიშვნელობიანი f ფუნქცია, სადაც $\mathbb{U}$ არის ღია სიმრავლე $\mathbb{C}$ კომპლექსურ რიცხვთა სიმრავლეში, $\mathbb{U} \subset \mathbb{C}$, ხოლო $\mathbb{V}$ არის კომპლექსური რიცხვებისაგან შედგენილი სიმრავლე, $\mathbb{V} \subset \mathbb{C}$.

განსაზღვრება 1.1.1.: თუ f ფუნქცია წარმოებადია კომპლექსური ცვლადით განსაზღვრის არის ყოველ წერტილში.

განსაზღვრება 1.1.2.: f ფუნქციას ეწოდება ანალიზური ფუნქცია თუ $z \in \mathbb{U}$ განსაზღვრის არის ყოველ z წერტილზე f ფუნქციის მნიშვნელობა შესაძლებელია იყოს რომელიღაც ხარისხოვანი მწკრივის ჯამი

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \tag{1.1.1.}$$

ყოველი $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{C}$.

განსაზღვრება 1.1.3: f ფუნქციას ეწოდება კონფორმული ფუნქცია თუ f ფუნქცია წარმოებადია კომპლექსური ცვლადით, წარმოებული განსხვავებულია ნულისაგან განსაზღვრის არის ყოველ წერტილში, შებრუნებადია და შებრუნებული ფუნქციაც წარმოებადია კომპლექსური ცვლადით თავისი განსაზღვრის არის ყოველ წერტილში.

განვიხილოთ n რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება:

$$y^{(n)} + a_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(z)y^{(1)} + a_n(z)y = 0, \tag{1.1.2.}$$

სადაც $a_i(z)$ არის კომპლექსური ცვლადის კომპლექსურ მნიშვნელობიანი რაციონალური ფუნქცია, $i = 1, 2, \ldots, n$.

დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა სივრცე წრფივი სივრცეა $\mathbb{C}$ კომპლექსურ რიცხვთა ველის მიმართ. საინტერესოა რანაირია ასეთი განტოლების ამონახსნი, მაგალითად შეიძლება დავინტერესდეთ ამონახსნი ლოგარითმულია, მერომორფულია, ჰოლომორფულია, პოლინომიალურია თუ სხვა სახისაა. თითოეულ მათგანზეა დამოკიდებული ლოკალური მონოდრომიები, რომლებზეც თავის მხრივ დამოკიდებულია გლობალური მონოდრომია. ა. ლ. კოშიმ (1789-1857) აჩვენა, რომ n რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების ამონახსნი ლოკალურად ჰოლომორფულია ნებისმიერი იმ $\alpha \in \mathbb{C}$ კომპლექსური რიცხვის მიდამოში, რომელიც არ არის პოლუსი დიფერენციალური განტოლების კოეფიციენტებისათვის.

განსაზღვრება 1.1.4.: $\alpha \in \mathbb{C}$ კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება რეგულარული თუ არსებობს $\lim_{x\to\alpha} a_i(z)$ ზღვრები და ისინი სასრულებია, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
მსგავსად ამ განსაზღვრებისა შეგვიძლია განვსაზღვროთ ∞ წერტილის რეგულარობაც, კერძოდ: ∞ წერტილს ეწოდება რეგულარული თუ არსებობს $\lim_{x\to\infty} z^{2i} a_i(z)$ ზღვრები და ისინი სასრულებია $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

განსაზღვრება 1.1.5.: $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ სიმრავლის წერტილს, რომელიც არ არის რეგულარული ეწოდება განსაკუთრებული ან სინგულარული.

განსაზღვრება 1.1.6.: $\alpha \in \mathbb{C}$ კომპლექსურ რიცხვს ეწოდება რეგულარული განსაკუღებული (სინგულარული) წერტილი თუ არსებობს $\lim_{x\to\alpha}(z-\alpha)^i a_i(z)$ ზღვრები და ისინი სასრულებია, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
აღნიშნულის მსგავსად ∞ წერტილს ეწოდება რეგულარული განსაკუთრებული (სინგულარული) წერტილი თუ არსებობს ზღვრები $\lim_{x\to\infty} z^i a_i(z)$ და ისინი სასრულებია, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

განვიხილოთ $\alpha \in \mathbb{C}$ კომპლექსური რიცხვი და დავუშვათ, რომ ის არის რეგულარული ან რეგულარული განსაკუთრებული (სინგულარული) წერტილი ე. ი. არსებობენ ზღვრები $\lim_{x\to\alpha} a_i(z)$ ან $\lim_{x\to\alpha}(z-\alpha)^i a_i(z)$ და ისინი აღვნიშნოთ α_i სიმბოლოებით ე. ი. $\alpha_i = \lim_{x\to\alpha} a_i(z)$ ან $\alpha_i = \lim_{x\to\alpha}(z-\alpha)^i a_i(z), i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

თუ ∞ წერტილი არის რეგულარული ან რეგულარული განსაკუთრებული (სინგულარული) წერტილი ე. ი. არსებობენ ზღვრები $\lim_{x\to\infty} z^{2i} a_i(z)$ ან $\lim_{x\to\infty} z^i a_i(z)$, მაშინ ისინიც აღვნიშნოთ α_i სიმბოლოებით ე. ი. $\alpha_i = \lim_{x\to\infty} z^{2i} a_i(z)$ ან $\alpha_i = \lim_{x\to\infty} z^i a_i(z), i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

განსაზღვრება 1.1.7.: მახასიათებელი განტოლება $\alpha \in \mathbb{C}$ რეგულარულ ან რეგულარულ განსაკუთრებულ (სინგულარულ) წერტილში ეწოდება განტოლებას:

$$\lambda(\lambda-1)\dots\big(\lambda-(n-1)\big)+\alpha_1\lambda(\lambda-1)\dots\big(\lambda-(n-2)\big)+\dots+\alpha_{n-1}\lambda+\alpha_n=0, \quad (1.1.3.)$$

ხოლო პოლინომს კი ეწოდება მახასიათებელი პოლინომი.

განსაზღვრება 1.1.8.: მახასიათებელი განტოლება ∞ რეგულარულ ან რეგულარულ განსაკუთრებულ (სინგულარულ) წერტილში ეწოდება განტოლებას:

$$\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1)-\alpha_1\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-2)+\dots+(-1)^{n-1}\alpha_{n-1}\lambda+(-1)^n\alpha_n=0, \quad (1.1.4.)$$

ხოლო პოლინომს კი ეწოდება მახასიათებელი პოლინომი.

განსაზღვრება 1.1.9.: $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ წერტილის შესაბამისი მახასიათებელი პოლინომების ფესვებს ეწოდებათ ლოკალური ექსპონენტები α წერტილში.

შეიძლება ცოტა უცნაურად მოგვეჩვენოს ∞ წერტილთან დაკავშირებულ განსაზღვრებაში z^{2i}-ს გამოყენება. შევეცადოთ გავარკვიოთ რა შეიძლება იყოს ამის მიზეზი: განვიხილოთ $\alpha \in \mathbb{C}$ კომპექსური რიცხვი და ავირჩიოთ ამ α კომპლექსურ რიცხვთან დაკავშირებული ლოკალური პარამეტრი $t \in \mathbb{C}(z)$, სადაც $\mathbb{C}(z)$ ერთი ცვლადის პოლინომების რგოლია, რომლების კოეფიციენტებიც კოპლექსური რიცხვებია, მაგალითად $t = z - \alpha$. დიფერენციალური განტოლება შეიძლება გადავწეროთ t ცვლადის გამოყენებით (მიმართ). ამ შემთხვევაში α რეგულარული თუ განსაკუთრებული (სინგულარული) იქნება ზუსტად მაშინ, როდესაც

ახლად მიღებული (გადაწერილი) განტოლება რეგულარული ან განსაკუთრებული (სინგულარული) იქნება $t = 0$ წერტილში. ეს განსაზღვრება ემთხვევა რეგულარობისა და განსაკუთრებულების (სინგულარობის) ჩვენ მიერ ზემოთ მოყვანილ განსაზღვრებას. ამასთან უნდა აღინიშნოს, რომ ლოკალური პარამეტრის არჩევაზე დამოკიდებულები არა ვართ.

შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$$L(y) = y^{(n)} + a_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(z)y^{(1)} + a_n(z)y. \qquad (1.1.5.)$$

ანალოგიურად შეიძლება მოვიქცეთ $\alpha = \infty$ წერტილის შემთხვევაშიც, კერძოდ თუ ლოკალურ პარამეტრად ავიღებთ ფუნქციას $t = \frac{1}{z}$. z და t ცვლადის მიმართ დიფერენცირებადობა ერთმანეთთან დაკავშირებულია ტოლობით: $\frac{d}{dz} = -t^2 \frac{d}{dt}$. საწყის დიფერენციალურ განტოლებაში $z = \frac{1}{t}$ ცვლადის t ცვლადით შეცვლის შემთხვევაში შედეგად მიიღება დიფერენციალური განტოლება $L'_\infty(y) = 0$, რომლის უფროსი წევრიც არის ასეთი $(-1)^n t^{2n} y^{(n)}$, ამის გამო სრულდება ტოლობა $L_\infty = (-1)^n t^{-2n} L'_\infty$. L_∞-ში $y^{(n-i)}$ წევრის კოფიციენტში მონაწილეობს t^{-2i} წევრი და $t = 0$ წერტილში რეგულარობის პირობა იძლევა იმ პირობას, რომელიც ჩვენ ზემოთ მოვიყვანეთ $\alpha = \infty$ წერტილში რაგულარობისა და განსაკუთრებულობისათვის (სინგულარობისათვის).

1. 2. ფუქსის ტიპის დიფერენციალური განტოლება

ჩვეულებრივი წრფივი დიფერენციალური განტოლებებიდან ჩვენ გვაინტერესებს მხოლოდ ისინი, რომლების განსაკუთრებული წერტილებიც არის რეგულარული ან რეგულარული განსაკუთრებული (სინგულარული) წერტილები.

განსაზღვრება 1.2.1.: ჩვეულებრივ დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება ფუქსის თუ $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-ის ყოველი წერტილი არის რეგულარული ან რეგულარული განსაკუთრებული (სინგულარული).

ფუქსის ყოველი განტოლებისათვის არსებობს დამოკიდებულება განტოლების რიგსა და ლოკალური ექსპონენტების ჯამს შორის, რომელსაც ფუქსის თანადობა ჰქვია.

თეორემა 1.2.1. - (ფუქსის თანადობა): ვთქვათ $\rho_1(\alpha), \rho_2(\alpha), \ldots, \rho_n(\alpha)$ აღნიშნავენ n რიგის ფუქსის განტოლების ლოკალურ ექპონენტებს, რომლებიც შეესაბამებიან $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. მაშინ სრულდება ტოლობა

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \left(\rho_1(\alpha)+\rho_2(\alpha)+\cdots+\rho_n(\alpha)-C_n^2\right)=-2C_n^2. \qquad (1.2.1.)$$

დამტკიცება: ჯერ აღვნიშნოთ, რომ თეორემაში მოყვანილი ჯამი არის სასრული. რეგულარულ წერტილებზე ლოკალური ექპონენტების ჯამი არის $1+2+3+\cdots+n-1=C_n^2$, რადგან რეგულარულ წერტილში მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე $\lambda(\lambda-1)\ldots\big(\lambda-(n-1)\big)$. განვიხილოთ $\alpha \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, მაშინ $\rho_1(\alpha)+\rho_2(\alpha)+\cdots+\rho_n(\alpha)$ ჯამი არის x^{n-1} წევრის კოეფიციენტი მახასიათებელ პოლინომში. ამის გამო სრულდება ტოლობა - $\rho_1(\alpha)+\rho_2(\alpha)+\cdots+\rho_n(\alpha)=$
$-1\left(-1-2-\cdots-(n-1)+\lim\limits_{z\to\alpha}(z-\alpha)a_1(z)\right)=C_n^2-\mathrm{res}_\alpha(a_1(z)dz)$,
ე. ი. $\mathrm{res}_\alpha(a_1(z)dz)=C_n^2-\big(\rho_1(\alpha)+\rho_2(\alpha)+\cdots+\rho_n(\alpha)\big)$ თუ $\alpha\neq\infty$, ხოლო იმ შემთხვევაში, როდესაც $\alpha=\infty$

$$\rho_1(\infty)+\rho_2(\infty)+\cdots+\rho_n(\infty)=-C_n^2-\mathrm{res}_\infty(a_1(z)dz).$$

აქედან გამომდინარე $\mathrm{res}_\infty(a_1(z)dz) = -C_n^2 - \left(\rho_1(\infty) + \rho_2(\infty) + \cdots + \rho_n(\infty)\right) = -2C_n^2 + C_n^2 - \left(\rho_1(\infty) + \rho_2(\infty) + \cdots + \rho_n(\infty)\right)$.

ყველა ნაშთის ჯამი ნულის ტოლია $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$-ზე ე. ი.

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \mathrm{res}_\alpha(a_1(z)dz) = 0,$$

ამის გამო მიიღება ტოლობა:

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \mathrm{res}_\alpha(a_1(z)dz) = \sum_{\alpha\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\setminus\{\infty\}} \left(C_n^2 - \left(\rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha) + \cdots + \rho_n(\alpha)\right)\right) +$$
$$+\left(-2C_n^2 + C_n^2 - \left(\rho_1(\infty) + \rho_2(\infty) + \cdots + \rho_n(\infty)\right)\right) =$$
$$= \sum_{\alpha\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \left(C_n^2 - \left(\rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha) + \cdots + \rho_n(\alpha)\right)\right) - 2C_n^2 = 0,$$

ე. ი.

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \left(C_n^2 - \left(\rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha) + \cdots + \rho_n(\alpha)\right)\right) - 2C_n^2 = 0,$$

ე. ი.

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} \left(C_n^2 - \left(\rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha) + \cdots + \rho_n(\alpha)\right)\right) = 2C_n^2,$$

ე. ი.

$$\sum_{\alpha\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})} (\rho_1(\alpha) + \rho_2(\alpha) + \cdots + \rho_n(\alpha) - C_n^2) = -2C_n^2.$$

ამით ნაჩენებია ტოლობა, რომელსაც ფუქსის თანადობა ეწოდება.

1. 3. ეილერის ერთგვაროვანი განტოლება

ფუქსის განტოლებას, რომელიც მოიცემა შემდეგი ფორმით:

$$z^n y^{(n)} + c_1 z^n y^{(n-1)} + \cdots + c_{n-1} z y^{(1)} + c_n y = 0, \qquad (1.3.1.)$$

ეწოდება ეილერის ერთგვაროვანი განტოლება ან n რიგის ეილერის განტოლება, სადაც $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$. განტოლების კოეფიციენტები მხოლოდ და მხოლოდ კომპლექსური რიცხვებია. განტოლებას აქვს მხოლოდ ორი განსაკუთრებული წერტილი - 0 და ∞. განტოლებაში z ცვლადის $z = 1/t$ ცვლადით ჩანაცვლებით მიიღება ეილერი სხვა განტოლება t ცვლადის მიმართ. ეილერის ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნთა სივრცის ბაზისი შეიძლება აღიწეროს შემდეგი გზით: ρ სიმბოლოთი აღვნიშნოთ 0 განსაკუთრებული წერტილის შესაბამისი ლოკალური ექსპონენტა, ხოლო r სიმბოლოთი აღნიშნული იყოს მისი ჯერადობა. $z^\rho, z^\rho \log(z), \ldots, z^\rho \log^{r-1}(z)$ - ფუნქციები არიან განტოლების r რაოდენობის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები. ყოველი ρ ლოკალური ექსპონენტასათვის არსებობს ასეთი ამონახსნები, რომლების ერთობლიობაც ერთად იძლევა ეილერის ერთგვაროვანი განტოლების ამონახსნთა სივრცის ბაზისს.

თავი II. მონოდრომიის ჯგუფი

2. 1. ლოკალური მონოდრომია

იმისათვის, რომ განვსაზღვროთ ლოკალური და გლობალური მონოდრომია, საჭიროა ზოგადად მიმოვიხილოთ წრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემები. ამისათვის განვიხილოთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$\frac{df}{dz} = A(z)f, \tag{2.1.1.}$$

სადაც $A(z)$ მატრიცული ფუნქცია ჰოლომორფულია $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$-ზე, სადაც $\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ წერტილები $A(z)$-ის განსაკუთრებული წერტილების სიმრავლეა.
როგორც ვიცით $z_0 \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})\backslash\{s_1, s_2, \ldots, s_m\}$ წერტილის მიდამოში განსახილველ $(2.1.1.)$ განტოლებათა სისტემა აქვს n წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი $y_1(z),\ y_2(z),\ \ldots,\ y_n(z)$. თითოეული მათგანი გაგრძელებადია ნებისმიერი წირის გასწვრივ და მათ შორის $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_m$ ისეთი მარტივი შეკრული წირების გასწვრივაც, რომლებიც იწყებიან და მთავრდებიან z_0 წერტილში. ამ გაგრძელების შედეგად $Y = \{y_1(z),\ y_2(z),\ \ldots,\ y_n(z)\}$-ის თითოეული ამონახსნისაგან მიიღება ახალი ფუნქცია, რომელიც იქნება განსახილველი $(2.1.1)$ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები, მოცემული ახალ განსაზღვრის არეზე. Y საწყისი და $\widetilde{Y} = \{\tilde{y}_1(z),\ \tilde{y}_2(z),\ \ldots,\ \tilde{y}_n(z)\}$ გაგრძელების შედეგად მიღებული ამონახსნები ერთმანეთთან დაკავშირებულია ტოლობით

$$Y = \widetilde{Y}M_i, \tag{2.1.2.}$$

სადაც M_i, გადაუგვარებელი, საზოგადოდ კომპლექსურ მნიშვნელობიანი, მუდმივი მატრიცებია $i = 1,\ \ldots,\ m$.

განსაზღვრება 2.1.1.: ამონსახსნთა სივრცის გაგრძელების შედეგად მიღებულ M_i - მუდმივ გადაუგვარებელ მატრიცებს ლოკალური მონოდრომიები ეწოდებათ, $i = 1, \ldots, m$.

2. 2. მონოდრომიის ჯგუფი

როგორც ვიცით (2.1.1.) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა სივრცე წრფივი სივრცეა და ამის გამო ნებისმიერი ამონახსნი არის Y-ის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნების წრფივი კომბინაცია. ამის გათვალისწინებით კი იმისათვის, რომ აღვწეროთ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნების წირების გასწვრივ გაგრძელებების შედეგად მიღებული ახალი ამონახსნების სივრცე და აქედან გამომდინარე ლოკალური მონოდრომიები საკმარისია Y-ის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები გავაგრძელოთ წირების გასწვრივ და დავაკვირდეთ შედეგად მიღებულ $\widetilde{Y}$ ამონახსნთა სივრცეს, მოცემულს ახალ განსაზღვრის არეზე.

წირის გასწვრივ გაგრძელების შედეგად მიღებული ფუნქცია განსაზღვრულია როგორც z_0 წერტილის თავდაპირველი მიდამოს წერტილებზე, ისე წირების საშუალებით შემოწერად z_0 წერტილის ახალ მიდამოებზეც და მათ შორის თვითონ წირების წერტილებზეც. აქედან გამომდინარე გამოდის, რომ z_0 წერტილის მიდამოს წერტილებზე განსაზღვრულია როგორც გაგრძელებამდე არსებული ფუნქცია, ისე ამ ფუნქციის გაგრძელების შედეგად მიღებული ახალი ფუნქცია. (2.1.1.) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნების z_0 წერტილიდან გამომავალი წერების გასწვრივ გაგრძელებების შედეგად მიღებული ფუნქციები კვლავ არიან თავდაპირველი დიფერენციალური განოტლებათა სისტემის ამონახსნები უკვე მოცემული ახალ განსაზღვრის არეზე.

(2.1.1.) დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის ამონახსნებისაგან შედგენილი Y ვექტორ ფუნქცია განსაზღვრულია z_0 წერტილის თავდაპირველ მიდამოში, ხოლო დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნების s_i განსაკუთრებული წერტილის გასწვრივ გაგრძელების შედეგად მიღებული კვლავ თავდაპირველი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებისაგან შედგენილი $\widetilde{Y}_i = \{\tilde{y}_1^i(z), \tilde{y}_2^i(z), \ldots, \tilde{y}_n^i(z)\}$ ვექტორ ფუნქცია კი მოცემულია z_0 წერტილის თავდაპირველი მიდამოს მომცველ ახალ მიდამოზე, რომელიც მოიცავს აგრეთვე s_i განსაკუთრებულ წერტილს და აიგება z_0 წერტილიდან გამომავალი s_i წერტილის გარშემო შემომვლელი მარტივი შეკრული წირების საშუალებით, $i = 1, \ldots, m$.

ამრიგად s_i ნებისმიერ განსაკუთრებულ წერტილთან დაკავშირებულია (2.1.1.) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებისაგან შედგენილი ორი წრფივი სივრცე, რომელთაგან ერთი წრფივი სივრცე არის z_0 წერტილის თავდაპირველ მიდამოში განსაზღვრული დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებისაგან შედგენილი წრფივი სივრცე, ხოლო მეორე კი არის z_0 წერტილის თავდაპირველ მიდამოში განსაზღვრული დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნების s_i განსაკუთრებული წერტილის გასწვრივ გაგრძელების შედეგად მიღებული კვლავ თავდაპირველი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებისაგან შედგენილი წრფივი სივრცე, ამჯერად მოცემული სხვა განსაზღვრის არეზე, $i = 1, \ldots, m$.

z_0 წერტილის თავდაპირველ მიდამოში განსაზღვრული (2.1.1.) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებისაგან შედგენილი წრფივი სივრცე აღვნიშნოთ L სიმბოლოთი, ხოლო z_0 წერტილის თავდაპირველ მიდამოში განსაზღვრული დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნების s_i განსაკუთრებული წერტილის გასწვრივ გაგრძელების შედეგად მიღებული კვლავ თავდაპირველი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებისაგან შედგენილი წრფივი სივრცე კი აღვნიშნოთ L_i სიმბოლოთი, $i = 1, \ldots, m$.

წრფივი სივრციდან წრფივ სივრცეზე გადასვლის მარტიცები იძლევიან საშუალებას განვსაზღვროთ ერთი წრფივი სიცრვის ბაზისში ჩაწერილი ამონახსნები როგორ ჩაიწერება სხვა წრფივი სივრცის ბაზისში. ამრიგად ბუნებრივად შემოდის L და L_i დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნებისაგან შედგენილ წრფივ სივრცეებს შორის იზომორფიზმის აგების საჭიროება, აუცილებლობა თუ შესაძლებლობა და მათ ერთობლივ ყოფაქცევაზე დაკვირვება. თითოეული იზომორფიზმი აღვნიშნოთ H_i სიმბოლოთი

$$H_i : L \to L_i,$$

რომლების ერთობლივი ყოფაქცევის შესასწავლად საჭიროა დავაკვირდეთ მათგან წარმოქმნილ ჯგუფს. ამის გამო შემოდის ე. წ. გლობალური მონოდრომიის ცნება, $i = 1, \ldots, m$.

გლობალური მონოდრომია 2.2.1.: H_i მატრიცებისაგან $i = 1, \ldots, m$ ე. ი. დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა წრფივ სივრცეებს შორის იზომორფიზმებისაგან წარმოქმნილი ჯგუფს ეწოდება გლობალური მონოდრომია.

წინადადება 2.2.1.: გლობალური მონოდრომია არის ლოკალური მონოდრომიებისაგან წარმოქმნილი ჯგუფი.

დამტკიცება: თუ დავაკვირდებით თავად მონოდრომიის მატრიცებიც გამოდიან (2.1.1.) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა წრფივ სივრცეებს შორის იზომორფიზმები და ამის გამო გლობალური მონოდრომია გამოდის მონოდრომიის მატრიცების ე. ი. ლოკალური მონოდრომიების შემცველი მინიმალური ჯგუფი. გარდა ამისა ლოკალური მონოდრომიები არიან L_i წრფივი სივრცის ავტომორფიზმებიც, $i = 1, \ldots, m$.

ვთქვათ α არის რეგულარული ან რეგულარული განსაკუთრებული (სინგულარული) წერტილი (1.1.2.) დიფერენციალური განტოლების. ვთქვათ α წერტილთან დაკავშირებული ლოკალური ექსპონენტები არიან $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ საზოგადოდ კომპლექსური რიცხვები. თუ ეს ლოკალური ექსპონენტები ერთმანეთისაგან არ განსხვავდებიან მთელი რიცხვებით, მაშინ არსებობს n წრფივად დამოუკიდებელი ლოკალური ამონახსნი, რომლებიც მოიცემიან ფორმულებით:

$$f_1(t) = t^{\rho_1} g_1(t),$$
$$f_2(t) = t^{\rho_2} g_2(t),$$
$$\vdots$$
$$f_n(t) = t^{\rho_n} g_n(t),$$

სადაც $g_1(t), g_2(t), \ldots, g_n(t)$ არიან გარკვეული ხარისხოვანი მწკრივები, $t = z - \alpha$ როდესაც α სასრული კომპლექსური რიცხვია და $t = 1/z$ როდესაც $\alpha = \infty$. ამონახსნების α წერტილის გარშემო გაგრძელებისას მიიღება შემდეგი სახის ახალი ამონახსნები:

$$\tilde{f}_1(t) = e^{2\pi i \rho_1} f_1(t) = e^{2\pi i \rho_1} t^{\rho_1} g_1(t),$$
$$\tilde{f}_2(t) = e^{2\pi i \rho_2} f_2(t) = e^{2\pi i \rho_2} t^{\rho_2} g_2(t),$$

$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$\tilde{f}_n(t) = e^{2\pi i\rho_n} f_n(t) = e^{2\pi i\rho_n} t^{\rho_n} g_n(t),$$

ამის გამო საწყის და ახალ ამონახსნებს შორის არსებობს კავშირი:

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \tilde{f}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2\pi i\rho_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\rho_2} & \cdots & 0 \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & \cdots & e^{2\pi i\rho_n} \end{pmatrix}. \qquad (2.1.3.)$$

$\mathrm{diag}\left(e^{2\pi i\rho_1}, e^{2\pi i\rho_2}, \ldots, e^{2\pi i\rho_n}\right)$ სახის მატრიცა გამოდის მონოდრომიის მატრიცა. აქედან კერძოდ გამომდინარეობს, რომ რეგულარულ წერტილში მონოდრომიის მატრიცა არის ერთეულოვანი მატრიცა. საზოგადოდ, როდესაც α რეგულარული ან რეგულარული განსაკუთრებული (სინგულარული) წერტილის შესაბამისი ორი ან მეტი ლოკალური ექსპონენტა განსხვავდება მთელი რიცხვით α წერტილის შესაბამის მონოდრომიის მატრიცას არ აქვს დიაგონალური სახე.

2. 3. პროექციული მონოდრომიის ჯგუფი

არა მხოლოდ $GL(n, \mathbb{C})$-ს ე. ი. $n \times n$ მუდმივი გადაუგვარებელი კომპლექსურ მნიშვნელობიანი მატრიცები თამაშობენ მნიშვნელოვან როლს დიფერენციალური განტოლებების თეორიაში, $PGL(n, \mathbb{C})$-ში მათი პროექციებიც აგრეთვე ძალიან მნიშვნელოვანია. $PGL(n, \mathbb{C})$ პროექციული ჯგუფი მიიღება $GL(n, \mathbb{C})$ ჯგუფის $\Lambda I = \{\lambda I_n : \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ თავისი ქვეჯგუფით გაფაქტორების შედეგად, რომელიც ცალკე განხილული არის არანულოვანი სკარალური გარდაქმნების (მატრიცების, ელემენტების) ჯგუფი, სადაც I_n არის $n \times n$ რიგის იგივური მატრიცა. ამის მიხედვით შეიძლება ბუნებრივად განისაზღვროს ჯგუფების ჰომომორფიზმი:

$$P: GL(n, \mathbb{C}) \to PGL(n, \mathbb{C}),$$
$$P(\gamma) = \gamma \cdot \Lambda I = \{\gamma \cdot (\lambda \cdot I_n) : \lambda \in \mathbb{C}^*\} = \{\lambda \cdot \gamma \cdot I_n : \lambda \in \mathbb{C}^*\} = \{\lambda \cdot \gamma : \lambda \in \mathbb{C}^*\} \qquad (2.3.1.)$$

განვიხილოთ $GL(n, \mathbb{C})$ ჯგუფის G ქვეჯგუფი. განსაზღვრების თანახმად - $P(G) = \{P(\gamma) \mid \gamma \in G\} = \{\{\lambda \cdot \gamma : \lambda \in \mathbb{C}^*\} \mid \gamma \in G\} \subset P(GL(n, \mathbb{C})) = \{\{\lambda \cdot \gamma : \lambda \in \mathbb{C}^*\} \mid \gamma \in GL(n, \mathbb{C})\}$. განვიხილოთ სიმრავლე $\{\lambda \cdot \gamma \cdot I_n : \lambda \in \mathbb{C}^*, \gamma \in G\} = \{\lambda \cdot \gamma : \lambda \in \mathbb{C}^*, \gamma \in G\} = G \cdot \Lambda I$, რომელსაც ცალკე განხილულს თუ დავაკვირდებით დავინახავთ, რომ ის არის ჯგუფი, რომელიც მოიცავს G ჯგუფს (შემთხვევა, როდესაც $\lambda = 1$). როდესაც γ იქნება G ქვეჯგუფის ერთეულოვანი ელემენტი, მაშინ მივიღებთ, რომ $\Lambda I \subset \{\lambda \cdot \gamma \cdot I_n : \lambda \in \mathbb{C}^*, \gamma \in G\} = G \cdot \Lambda I$. ამის გამო $G \cdot \Lambda I$ ჯგუფის ΛI თავისი ქვეჯგუფით გაფაქტორების შედეგად მივიღებთ $P(G)$-ს. მართლაც განსაზღვრების თანახმად გაფაქტორების შედეგად $G \cdot \Lambda I$ სიმრავლის $\lambda \cdot \gamma \cdot I_n$ ელემენტი წარმოქმნის $(\lambda \cdot \gamma \cdot I_n) \cdot \mu \cdot I_n = \mu \cdot (\lambda \cdot \gamma \cdot I_n) \cdot I_n = \mu \cdot \lambda \cdot \gamma \cdot I_n \cdot I_n = (\mu \cdot \lambda) \cdot \gamma \cdot I_n$ - ასეთ ელემენტს (რომელიც ცალკე განხილული სიმრავლეა), სადაც λ და γ ფიქსირებულებია, ხოლო μ იცვლება $\mathbb{C}^*$-ზე, აქედან გამომდინარე $\mu \cdot \lambda$ იცვლება $\mathbb{C}^*$-ზე. ე. ი. $\gamma \in G$ ელემენტი ერთიდაიგივე ელემენტს (სიმრავლეს) წარმოქმნის $GL(n, \mathbb{C})$ და G ჯგუფების ΛI ქვეჯგუფით გაფატორების შემთხვევაში.

რადგან $I_n \in G$ და $I_n \in \Lambda I$ ამის გამო $G \cap \Lambda I \neq \emptyset$. აქედან კი გამომდინარეობს, რომ G ჯგუფის $G \cap \Lambda I$ ქვეჯგუფით გაფატორების შემთხვევაში $\gamma \in G$ ელემენტი წარმოქმნის $\{\gamma \cdot (\lambda \cdot I_n) : \lambda \in \mathbb{C}^*, \lambda \cdot I_n \in G \cap \Lambda I\} = \{\lambda \cdot \gamma \cdot I_n : \lambda \in \mathbb{C}^*, \lambda \cdot I_n \in G \cap \Lambda I\}$ ელემენტს (სიმრავლეს). ამის გამო ბუნებრივად წარმოიქმნება იზომორფიზმი $P(G)$ და $G\,/\,G \cap \Lambda I$ ჯგუფებს შორის ე. ი. $P(G)$ და $G\,/\,G \cap \Lambda I$

ჯგუფები ერთმანეთის იზომორფულებია. ზოგჯერ შეიძლება უფრო მოსახერხებელი იყოს $P(G)$-ს ამ უკანასკნელი ფორმით განხილვა.

მონოდრომიის ჯგუფი წარმოქმნილია $GL(n, \mathbb{C})$-ს ელემენტებისაგან და $GL(n, \mathbb{C})$-ს ელემენტების ნებისმიერი ერთობლიობის მომცველი ერთ-ერთი ჯგუფი არის თავად $GL(n, \mathbb{C})$ ჯგუფი. ამის გამო მონოდრომიის ჯგუფი არის $GL(n, \mathbb{C})$-ს ქვეჯგუფი.

განსაზღვრება 2.3.1.: ვთქვათ M არის ფუქსის განტოლების მონოდრომიის ჯგუფი, მაშინ $P(M) \in P\big(GL(n, \mathbb{C})\big)$ მის პროექციულ ანასახს ეწოდება ფუქსის განტოლების პროექციული მონოდრომიის ჯგუფი.

განსაზღვრება 2.3.2.: G ჯგუფის პროექციის ბირთვი არის $G \cap \Lambda I$ - G-ს სკალარული ელემენტების ქვეჯგუფი.

განსაზღვრება 2.3.3.: G ჯგუფის a და b ელემენტებს ეწოდებათ ერთმანეთის შეუღლებული ელემენტები თუ G ჯგუფში არსებობ $g \in G$ ელემენტი ისეთი, რომ სრულდება ტოლობა $b = gag^{-1}$.

შეუღლება არის ექვივალენტობის მიმართება G ჯგუფზე, რაც შესაძლებელს ხდის G ჯგუფი დაიყოს $Cl(a) = \{gag^{-1} \mid g \in G\}$ ექვივალენტობის კლასებად, სადაც $Cl(a)$ აღნიშნავს G ჯგუფის a ელემენტის ექვივალენტობის კლასს.

განსაზღვრება 2.3.4.: $\widetilde{G}$ ჯგუფს ეწოდება G ჯგუფის შეუღლებული ჯგუფი თუ არსებობს ისეთი გადაუგვარებელი A მატრიცა, რომ სრულდება ტოლობა $\widetilde{G} = AGA^{-1} = \{AgA^{-1} \mid g \in G\}$.

პროექციული მონოდრომიის ჯგუფი სინამდვილეში განისაზღვრება შეუღლებამდე სიზუსტით $P\big(GL(n, \mathbb{C})\big)$-ში. ეს გამომდინარეობს იქიდან, რომ მონოდრომიის ჯგუფი თვითონ განისაზღვრება შეუღლებამდე სიზუსტით ნებისმიერი შებრუნებადი მატრიცის საშუალებით. აღვნიშნოთ, რომ საზოგადოდ ნებისმიერი ორ შეუღლებულ ჯგუფს $GL(n, \mathbb{C})$-ში აქვს

ერთიდაიგივე პროექციის ბირთვი. მათი პროექციული ანასახებიც ერთმანეთის შეუღლებულებია $P\big(GL(n, \mathbb{C})\big)$-ში.

განსაზღვრება 2.3.4.: G_1 და $G_2 \subset GL(n, \mathbb{C})$-ს ორ ქვეჯგუფს ვუწოდებთ პროექციულად შეუღლებულ ჯგუფებს თუ $P(G_1)$ და $P(G_2)$ მათი პროექციული ანასახები ერთმანეთის ელემენტებით შეუღლებული ჯგუფებია $P\big(GL(n, \mathbb{C})\big)$-ში ე. ი. არსებობს $g \in P(G_1)$ ისეთი, რომ $P(G_1) = gP(G_2)g^1$.

მოცემული მონოდრომიის ჯგუფის შეუღლებული ჯგუფიც შეიძლება განვიხილოთ როგორც მონოდრომიის ჯგუფი, რომელიც დაკავშირებულია განტოლების ამონახსნთა სივრცის განსხვავებულ ბაზისთან.

თავი III. მეორე რიგის განტოლებებისაგან ინდუცირებული მონოდრომიის ჯგუფები

3. 1. $\mathbf{PGL}(\mathbf{2},\ \mathbb{C})$ პროექციული სივრცის ქვეჯგუფები

განვიხილოთ მეორე რიგის ფუქსის განტოლებებისაგან ინდუცირებული მონოდრომიის ჯგუფები წარმოადგნენ $\mathrm{GL}(2,\ \mathbb{C})$-ს ქვეჯგუფებს. ნებისმიერი ქვეჯგუფი მოქმედებს $\mathbb{P}^1$ რიმანის სფეროზე, უფრო კონკრეტულად $\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\ \mathbb{C})$ შეგვიძლია განვიხილოთ ნებისმირი მატრიცის მოქმედება $\mathbb{C}$-ზე შემდეგი წესით

$$\gamma * t = \frac{at + b}{ct + d}\ , \qquad (2.3.1.)$$

$t \in \mathbb{C}$, რომელსაც წილად-წრფივი ასახვა ეწოდება. ეს ასახვა შეიძლება გადავიტანოთ (გავაგრძელოთ) $\mathbb{P}^1$ რიმანის სფეროზეც. რადგან

$$\lim_{t\to\infty} \frac{at + b}{ct + d} = \begin{cases} \frac{a}{c}, & \text{როდესაც } c \neq 0 \\ \infty, & \text{როდესაც } c = 0 \end{cases},$$

ამის გამო γ მატრიცის ∞ ელემენტზე მოქმედებას განვსაზღვრავთ $\gamma * \infty = \frac{a}{c}$ ასეთნაირად, როდესაც $ac \neq 0$ და $\gamma * \left(-\frac{d}{c}\right) = \infty$, როდესაც $c \neq 0$. $\mathbb{P}^1$ რიმანის სფეროზე G ჯგუფის მოქმედების საშუალებით შეგვიძლია განვსაზღვრავთ პროექციული ჯგუფის $\mathrm{PG} \subset \mathrm{PGL}(n,\ \mathbb{C})$ მოქმედება $\mathbb{P}^1$-ზე, რაც ფუნქციების ენაზე ნიშნავს ასეთ ასახვას:

$$\begin{aligned} &\mathrm{PG} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1, \\ &\gamma \cdot \Lambda I_2 : t \to \gamma * t \end{aligned} \qquad (2.3.2.)$$

პროექციული ჯგუფი შეიძლება განვიხილოთ როგორც $\mathbb{P}^1$-ის ავტომორფიზმების ჯგუფის ქვეჯგუფი.

3. 2. კომპლექსური არეკვლების ჯგუფი

განვიხილოთ $L(y) = 0$ მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლება. მისი მონოდრომიის ჯგუფი წარმოქმნილია $GL(2, \mathbb{C})$-ს მატრიცებისაგან. წარმომქმნელები დაკავშირებულებია მარტივ, დადებითად ორიენტირებულ, ჩაკეტილ წირებთან, რომლებიც ერთხელ შემოუვლიან განსაკუთრებულ წერტილებს. დავაფიქსიროთ $\alpha \in \mathbb{C}$ განსაკუთრებული წერტილი, რომლის შესაბამისი ლოკალური ექსპონენტებიცაა ρ_1 და ρ_2. თუ ჩვენ შევცვლით $y(z)$ ცვლადს $(z - \alpha)^{-\rho_1} y(z)$ ცვლადით, მაშინ მიღებული ახალი ფუქსის სისტემასათვის ლოკალური ექსპონენტები α წერტილში იქნება რიცხვები 0 და $\rho_2 - \rho_1$. სხვა წერტილების შესაბამისი ლოკალური ექსპონენტებიც შეიცვლებიან მსგავსად, ხოლო ∞ წერტილთან დაკავშირებული გარდაქმნამდელი ლოკალური ექსპონენტებიდან თითოეულს დაემატება ρ_1. აღნიშნული კონსტრუქცია შეიძლება შევადგინოთ $L(y) = 0$ მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების ყოველი სასრული განსაკუთრებული წერტილისათვის, რომლის შედეგადაც მიიღება დიფერენციალური განტოლებები, რომლებისთვისაც ყოველი სასრული განსაკუთრებული წერტილის შესაბამისი ლოკალური ექსპონენტებიდან ერთი მაინც იქნება 0-ის ტოლი. გარდაქმნის შედეგად მიღებული განტოლების მონოდრომიის ჯგუფი წარმოიქმნება გარდაქმნის შედეგად მიღებული განტოლების მონოდრომიის მატრიცებისაგან, რომელთაგან თითოეულ მატრიცას ერთი საკუთრივი მნიშვნელობა აქვს $e^0 =$ 1-ის ტოლი. დანარჩენი საკუთრივი მნიშვნელობები შესაძლოა 1-საგან განსხვავებულები იყვნენ. მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების გარდაქმნის შედეგად მიღებული განტოლების მონოდრომიის ჯგუფი არის ორგანზომილებიანი არეკვლების ჯგუფის მაგალითი.

განსაზღვრება 3.2.1.: ლამეს განტოლების მონოდრომიის ჯგუფი ან იგივე გლობალური მონოდრომია ეწოდება ლოკალური მონოდრომიების შემცველ მინიმალურ ჯგუფს.

განსაზღვრება 3.2.2.: $g \in GL(n, \mathbb{C})$ მატრიცას ეწოდება არეკვლის (რეფლექსური) ან კომპლექსური არეკვლის მატრიცა თუ $g - I_n$ მატრიცის რანგი არი 1-ის ტოლი, სადაც I_n არის $n \times n$ ერთეულოვანი მატრიცა.

განსაზღვრება 3.2.3.: არეკვლის მატრიცებისაგან წარმოქმნილ ჯგუფს ეწოდება არეკვლების ჯგუფი.

თავი IV. ლამეს განტოლების მონოდრომიის ჯგუფი

4. 1. ლამეს განტოლების მონოდრომიის ჯგუფის დახასიათება

ფუქსის ტიპის განტოლების კერძო შემთხვევაა ჰოინის განტოლება - მეორე რიგის დიფერენციალური განტოლება ოთხი განსაკუთრებული წერტილით:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{\gamma}{z} + \frac{\delta}{z-1} + \frac{\epsilon}{z-t}\right)\frac{dy}{dz} + \frac{\alpha\beta z - q}{z(z-1)(z-t)}y = 0, \qquad (4.1.1.)$$

$\gamma + \delta + \epsilon = \alpha + \beta + 1$, განსაკუთრებული წერტილებია 0, 1, t, ∞. ჰოინის განტოლების კანონიკური სახეა ლამეს განტოლება. ჩვენ სწორედ ლამეს განტოლებებს, მასთან დაკავშირებულ ლოკალურ და გლობალურ მონოდრომიებს მიმოვიხილავთ ამ თავში.

მეორე რიგის ფუქსის განტოლების კერძო შემთხვევა, რომელსაც ლამეს განტოლება ეწოდება ფრანგი მათემატიკოსისა და ინჟინერის გაბრიელ ლამეს (1795-1870) პატივსაცემად მოიცემა შემდეგი სახით:

$$p(z)y'' + \frac{1}{2}p'(z)y' - (n(n+1)z + B)y = 0,$$

$$p(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 4\prod_{i=1}^{3}(z - z_i);$$

$$n \in \mathbb{Q}, \quad g_2, g_3, B, z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C},$$

$p(z)$ - კვადრატული წევრისაგან თავისუფალი პოლინომია. ლამეს განტოლებას აქვს 4 განსაკუთრებული წერტილი, რომელთაგან სამი არის $p(z)$ პოლინომის ფესვი და ხოლო ერთი დამატებითი განსაკუთრებული წერტილი კი არის ∞. დამატებითი (აქსესორული) პარამეტრებია B და n - ინდექსი. მხოლოდ B პარამეტრი არ განისაზღვრება განსაკუთრებული (სინგულარული) წერტილების მდებარეობითა და მათი ექსპონენტების საშუალებით.

განსაზღვრება 4.1.1.: n რიგის ლამეს დიფერენციალური ოპერატორი აღინიშნება L_n სიმბოლოთი და განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$L_n = p(z)\frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{2}p'(z)\frac{d}{dz} - (n(n+1)z + B) \qquad (4.1.1.)$$

ამ განსაზღვრების გამო შეიძლება ვთქვათ, რომ ლამეს განტოლება მოიცემა ტოლობებით $L_n(y) = 0$.

აღვნიშნოთ, რომ სრულდება ტოლობა $L_{-n-1} = L_n$. ამის გამო შეგვიძლია მსჯელობა ჩავატაროთ იმ შემთხვევებისათვის, როდესაც $n + \frac{1}{2} \geq 0$.

განსაზღვრება 4.1.2.: B მატრიცას ეწოდება A მატრიცის შეუღლებული ან მსგავსი თუ არსებობს g მატრიცა ისეთი, რომ $B = gAg^1$.

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $n \geq -\frac{1}{2}$. ლამეს განტოლების განსაკუთრებულ წერტილებს შეესაბამებათ z_1, z_2, z_3 და ∞ წერტილებში ლოკალური ექსპონენტებისაგან შედგენილი შემდეგი სქემა:

$$\begin{pmatrix} z_1 & z_2 & z_3 & \infty \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{n}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{n+1}{2} \end{pmatrix}.$$

სასრულ წერტილებში ლოკალური ექსპონენტები არიან 0 და 1 / 2 რიცხვები და γ_1, γ_2, γ_3 და γ_∞ ლამეს განტოლების შესაბამისი ლოკალური მონოდრომიებისათვის სრულდება ტოლობა $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_\infty = I_2$, რომლებიც ცალკე განხილულები მეორე რიგის მატრიცებია და ამასთანავე მონოდრომიის ჯგუფის ელემენტებია. უფრო ზუსტად, რადგან ლოკალური ექსპონენტები ერთამენთისაგან მთელი რიცხვით განსხვავდებიან და ამის გამო γ_1, γ_2 და γ_3 ლოკალური მონოდრომიები გამოდიან

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

არეკვლის მატრიცის შეუღლებული მატრიცები, რადგან მათი საკუთრივი რიცხვების გამო სრულდება ტოლობები $e^{0(2\pi i)} = 1$ და $e^{\frac{1}{2}(2\pi i)} = -1$. ისინი შეესაბამებიან მარტივ შეკრულ

წირებს, რომლებიც ერთხელ შემოუვლიან კომპლექსურ განსაკუთრებულ წერტილებს საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით.

წინადადება 4.1.1.: M ლამეს განტოლების მონოდრომიის ჯგუფი წარმოქმნილია 2 რიგის არეკვლების მატრიცებისაგან.

შენიშნვა 4.1.1.: წინადადება 4.1.1.-ის პირობიდან გამომდინარეობს, რომ M-ის ე. ი. ლამეს განტოლების მონოდრომიის ჯგუფის თითოეული ელემენტის (მატრიცის) დეტერმინანტი არის 1 ან -1. კერძოდ M-ის სკალარული ელემენტები არიან λI_2 სახის მატრიცები, სადაც $\lambda \in \mathbb{C}$, ეკუთვნიან $\langle iI_2 \rangle$ ქვეჯგუფს ე. ი. iI_2 მატრიცით წარმოქმნილ ჯგუფს.

დამტკიცება: M ლამეს განტოლების მონოდრომიის ჯგუფი წარმოქმნილია γ_1, γ_2 და γ_3 ლოკალური მონოდრომიებისაგან, რომლებიც არიან მეორე რიგის კომპლექსური არეკვლები. ამის გამო M-ის თითოეული ელემენტის (მატრიცის) დეტერმინანტი არის 1 ან -1. M-ის სკალარული ელემენტებისაგან ე. ი. λI_2 სახის მატრიცებისაგან შედგენილი ქვეჯგუფი, სადაც $\lambda \in \mathbb{C}$ შედის $\langle iI_2 \rangle$ ქვეჯგუფში.

γ_∞ მატრიცა, რომელიც შეესაბამება მარტივ ჩაკეტილ წირს ∞ წერტილის მიდამოში არის

$$\begin{pmatrix} e^{-\frac{n}{2}2\pi i} & 0 \\ 0 & e^{\frac{n+1}{2}2\pi i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-n\pi i} & 0 \\ 0 & e^{(n+1)\pi i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-n\pi i} & 0 \\ 0 & e^{n\pi i}e^{\pi i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-n\pi i} & 0 \\ 0 & -e^{n\pi i} \end{pmatrix}$$

მატრიცის შეუღლებული მატრიცა იმ შემთხვევაში თუ $n + \frac{1}{2}$ არ არის მთელი. ამ შემთხვევაში ∞ წერტილის შესაბამისი ორი ლოკალური ექსპონენტა ერთმანეთისაგან განსხვავდება მთელი რიცხვით. ამის გამო ლამეს განტოლების წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნები ∞ წერტილში მოიცემა ფორმულებით $t^{\rho_1}g_1$ და $t^{\rho_2}g_2 + c\log(t)t^{\rho_1}g_1$, სადაც ρ_1 და ρ_2 არის ∞ წერტილის შესაბამისი ლოკალური ექსპონენტები, g_1 და g_2 კრებადი მწკრივებია, ხოლო c მუდმივია. ამის გამო γ_∞ მატრიცას მხოლოდ ერთი საკუთრივი მნიშვნელობა აქვს და ეს რიცხვია $e^{-n\pi i}$, ხოლო შესაბამის ჟორდანის მატრიცას აქვს სახე

$$\begin{pmatrix} e^{-n\pi i} & \beta \\ 0 & e^{-n\pi i} \end{pmatrix},\ \beta \in \mathbb{C}.$$

მატრიცის შეუღლებული მატრიცა. თუ $n + \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$, მაშინ $e^{-n\pi i} \in \{i, -i\}$.

γ_1, γ_2, γ_3 და γ_∞ მატრიცების პროექციული ანასახები $PGL(2,\mathbb{C})$-ში აღვნიშნოთ σ_1, σ_2 და σ_3 სიმბოლოებით ე. ი. σ_1, σ_2, σ_3, $\sigma_\infty \in PGL(2,\mathbb{C})$. γ_1, γ_2 და γ_3 მატრიცებიდან თითოეულს აქვს გარკვეული საკუთრივი მნიშვნელობები. აქედან გამომდინარე σ_1, σ_2 და σ_3 მატრიცები კვლავ არიან

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

მატრიცის შეუღლებული მატრიცები მაგრამ უკვე $PGL(2,\mathbb{C})$ სიმრავლეში, რომლებიც წარმოქმნიან PM ჯგუფს ე. ი. M ლამეს განტოლების მონოდრომიის ჯგუფის შესაბამის პროექციულ ჯგუფს და ამის გამო შეგვიძლია გადავიდეთ პროექციულ სივრცეზე. σ_∞ მატრიცა არის მატრიცა, რომელიც

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{(n+\frac{1}{2})(2\pi i)} \end{pmatrix}$$

მატრიცის შეუღლებულია $PGL(2,\mathbb{C})$-ში თუ $n - \frac{1}{2}$ არ არის მთელი. წინააღმეგ შემთხვევაში ე. ი. თუ $n - \frac{1}{2} \in \mathbb{Z}$ არსებობს $\beta \in \mathbb{C}$ კომპლექსური რიცხვი ისეთი, რომ σ_∞ არის

$$\begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

მატრიცის შეუღლებული მატრიცა $PGL(2,\mathbb{C})$-ში.

როდესაც ლამეს განტოლების ლოკალური ექსპონენტები α სასრულ წერტილებში ერთმანეთისაგან არ განსხვავდება მთელი რიცხვებით არსებობს (f_1, f_2) ამონახსნთა სივრცის ბაზისი, რომელიც $t = z - \alpha$ ცვლადის ასეთი შეცვლით მიიღებენ სახეს $f_1 = t^{\mu_1^\alpha} g_1$ და $f_2 = t^{\mu_2^\alpha} g_2$,

სადაც g_1 და g_2 გარკვეული ხარისხოვანი მწკრივებია t-ს მიმართ, μ_1^α და μ_2^α არიან α კომპლექსური რიცხვების შესაბამისი ლოკალური ექსპონენტები.

ნებისმიერი ლამეს განტოლებისათვის, რომლებისთვისაც $n-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ არსებობს ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნი ∞ განსაკუთრებულ წერტილში, რომელთაგან ერთი მიეკუთვნება $-n/2$ ექსპონენტას, ხოლო მეორე კი $(n+1)/2$ ექსპონენტას. ლოკალურად ეს ამონახსნები შეიძლება მოიცეს ლორანის მწკრივის საშუალებით $t=1/z$ პარამეტრის მიმართ. ამონახსნები გამოდიან $t^{-n/2}s_1(t)$ და $t^{(n+1)/2}s_2(t)$ ფუნქციები, სადაც $s_1(t)$ და $s_2(t)$ რომელიღაც ჰოლომორფული ხარისხოვანი მწკრივებია არატრივიალური მუდმივი წევრით. ეს მწკრივები განისაზღვება სკალარზე გამრავლების სიზუსტით და მათი მუდმივი წევრები შეიძლება იყოს რიცხვი 1-ის ტოლიც.

4. 2. გლობალური მონოდრომიის უნიტარულობის პირობა $n = -1/2$-თვის

ლამეს განტოლების მონოდრომიის ჯგუფის თვისებები ისეთები, როგორებიცაა აბელურობა, დაყვანადომა, სასრულობა, უსასრულობა და სხვა დეტალურადაა შესწავლილი [1] ნაშრომში. ჩვენ შევეცდებით ლამეს კონკრეტული განტოლების შემთხვევაში მიმოვიხილოთ ამ კონკრეტული განტოლების მონოდრომიის ჯგუფის უნიტარობის პირობასთან დაკავშირებული საკითხი კონკრეტულ შემთხვევაში.

განსაზღვრება 4.2.1.: $A = (a_{ij})$ მატრიცის a_{ij} ელემენტების $\overline{a_{ij}}$ შეუღლებული ელემენტებისაგან შედგენილი მატრიცის ტრანსპონირებულ მატრიცას ეწოდება A მატრიცის ერმიტულად შეუღლებული მატრიცა და აღინიშნება A^* სიმბოლოთი - $A^* = (\overline{a_{ji}})$.

განსაზღვრება 4.2.2.: მატრიცას ეწოდება უნიტარული მატრიცა თუ მატრიცის ერმიტულად შეუღლებული და შებრუნებული მატრიცები ერთმანეთს ემთხვევა ე. ი. თუ $A^* = A^{-1}$.

განსაზღვრება 4.2.3.: მატრიცას ეწოდება ერმიტული მატრიცა თუ მატრიცა ემთხვევა თავის ერმიტულად შეუღლებულ მატრიცას ე. ი. თუ

$$a_{ij} = \overline{a_{ji}}.$$

A მატრიცის ერმიტულ მატრიცას აღნიშნავენ სიმბოლოთი A^H.

უნიტარული ჯგუფი 4.2.4.: უნიტარული მატრიცებისაგან წარმოქმნილ ჯგუფს ეწოდება უნიტარული ჯგუფი.

შვარც-კრისტოფელის ასახვა: ვთქვათ P არის არე, რომელიც შემოსაზღვრულია Γ წირით, რომლის წვეროებია $w_1, w_2, \ldots, w_n$ და შიდა კუთხეებია $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \ldots, \alpha_n\pi$. ვთქვათ f არის კონფორმული ასახვა განსაზღვრული H^+ ზედა ნახევარ სიბრტყიდან P არეში და $f(\infty) = w_n$, მაშინ შემდეგ ასახვას

$$f(z) = A + C\int^{z}\prod_{k=1}^{n-1}(\zeta - z_k)^{\alpha_k - 1}d\zeta, \qquad (4.2.1.)$$

ეწოდება შვარც-კრისტოფელის ასახვა, სადაც A და C კომპლექსური რიცხვებია და $f(z_k) = w_k$, $k = 1, \ \dots, \ n-1$.

განვიხილოთ ლამეს განტოლება კომპლექსურ სიბრტყეზე $n = -1/2$ პარამეტრისათვის. მიიღება შემდეგი სახის განტოლება:

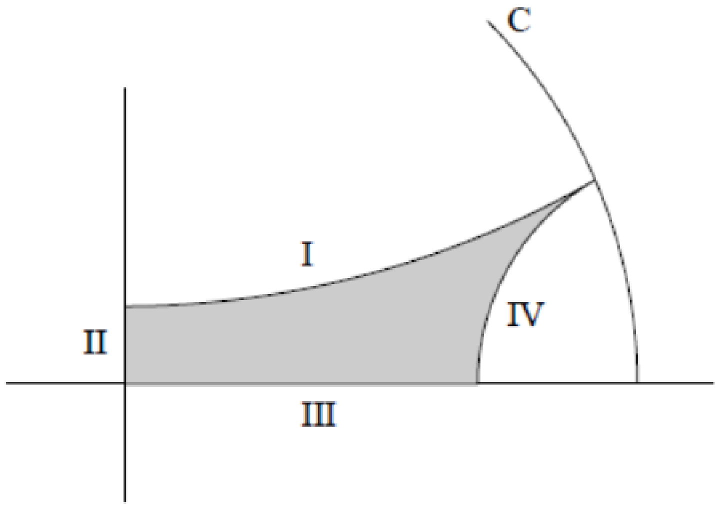
$$p(z)y'' + \frac{1}{2}p'(z)y' + \left(\frac{z}{4} - B\right)y = 0, \qquad (4.2.2.)$$

$$p(z) = 4z^3 - g_2 z - g_3 = 4\prod_{i=1}^{3}(z - z_i).$$

როგორც ვიცით ეს განტოლება არის ფუქსის ტიპის და აქვს $z_1, \ z_2, z_3, \infty$ ოთხი განსაკუთრებული წერტილი. 0 და 1/2 რიცხვები ლოკალური ექსპონენტებია სასრულ განსაკუთრებულ წერტილებში, ხოლო 1/4 და 1/4 რიცხვები კი არიან ლოკალური ექსპონენტები ∞ განსაკუთრებულ წერტილში. სამართლიანია შებრუნებული წინადადებაც, რომ ნებისმიერი წრფივი დიფერენციალური განტოლება ოთხი განსაკუთრებული წერტილითა და ლოკალური ექსპონენტებით მოიცემა აუცილებლად ლამეს განტოლების სახით, უფრო ზუსტად თუ ვიტყვით: როდესაც სხვაობა მონოდრომიის მატრიცების პარამეტრების რაოდენობასა და განსაკუთრებული წერტილების რაოდენობას შორის არის 1 და ეს პირობა სრულდება ლამეს განტოლების შემთხვევაში, მონოდორმიების მატრიცების საშუალებით ისეთი განტოლება შეიძლება დაიწეროს ოთხი განსაკუთრებული წერტილით, რომელიც შეიცავს ერთ დამატებით (აქსესორულ) პარამეტრს ე. ი. ჩვენს შემთხვევაში მონოდრომიების მატრიცების საშუალებით შეიძლება დაიწეროს ლამეს განტოლება.

მხოლოდ B აქსესორული (დამატებითი) პარამეტრი არ განისაზღვრება განსაკუთრებული წერტილების მდებარეობებითა და მათი ექსპონენტებით. ვთქვათ G არის ლამეს განტოლების მონოდრომიის ჯგუფი. შევეცადოთ გავარკვიოთ აქსესორული პარამეტრის როლი და მნიშვნელობა, კერძოდ განვიხილოთ ასეთი ამოცანა: B-ს ე. ი. აქსესორული პარამეტრის რომელი მნიშვნელობისათვის არის G მონოდრომიის ჯგუფი უნიტარული ?. ჩვენ ამ საკითხს

შევისწავლით იმ შემთხვევისათვის, როდესაც $p(z)$ პოლინომის z_1, z_2 და z_3 ფესვები არიან ნამდვილი რიცხვები ამავე თანმიმდევრობით დალაგებული ზრდადობით. განვიხილოთ ლამეს განტოლებასთან დაკავშირებული შვარც-კრისტოფელის ასახვა, რომელიც შედგება $D(z) = y_1(z)/y_2(z)$ ფუნქციის კოეფიციენტებისაგან, სადაც $y_1(z)$ და $y_2(z)$ ლამეს განტოლების ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნია. რადგან $z_1 < z_2 < z_3$ არიან ნამდვილი რიცხვები, ამის გამო შვარც-კრისტოფელის ასახვა $(-\infty, z_1)$, (z_1, z_2), (z_2, z_3) და $(z_3, +\infty)$ ინტერვალებს გადასახავს ორ სეგმენტში და ორ წრეწირის რკალში, რომლებსაც აღვნიშვნავთ I, II, III და IV სიმბოლოებით ისე, როგორც ეს შემდეგ ნახაზზეა წარმოდგენილი.



ნახაზი 4.2.1.

I და IV რკალები ერთმანეთს ეხებიან, რადგან ∞ წერტილის შესაბამისი ექსპონენტები ერთმანეთის ტოლია და ამის გამო ისინი ერთმანეთისაგან ნულით განსხვავდებიან. რადგან z_1, z_2 და z_3 წერტილების შესაბამისი ლოკალური ექსპონენტების სხვაობა $1/2$-ია, ამის გამო (I, II), (II, III) და (III, IV) ნაწილები დადებით მეოთხედებში კვეთენ საკოორდინატო ღერძებს მართი კუთხით. გასათვალისწინებელია, რომ ნახაზზე წარმოდგენილი განლაგება შეესაბამება იმ შემთხვევას, როდესაც $y_1(z)$-ს არ აქვს ნულები (z_1, z_2) და (z_2, z_3) ინტერვალებში. იმ შემთხვევაში, თუ $y_1(z)$-ს ექნება ნულები აღნიშნულ ინტერვალებში შვარც-კრისტოფელის ასახვით განსაზღვრული ნახატი რამდენჯემე შიეძლება გადაეხატოს საკუთარ თავს.

ე. ი. $n = -1/2$ პარამეტრის შესაბამისი ლამეს განტოლებისაგან მიიღება მრუდწირული ოთხკუთხედი, რომლის შემადგენელი სამი წერტილის განმსაზღვრელი არის ორი მონაკვეთი,

მეოთხე წერტილს კი განსაზღვრავენ წრეწირის რკალები, კერძოდ მეოთხე წერტილი წრეწირის რკალების შეხების წერტილია.

განვიხილოთ $\bar{S}$ წრეწირების მიმართ კომპლექსური არეკვლებით წარმოქმნილი ჯგუფი. ვთქვათ $S \subset \bar{S}$ არის $\mathbb{P}^1$-ზე განსაზღვრული ავტომორფიზმების ჯგუფის ქვეჯგუფი, რომლის ინდექსიც არის ორი. G მონოდრომიის ჯგუფი არის S-ის $\Lambda I = \{\lambda I_2 : \lambda \in \mathbb{C}^*\}$ სკალარებით გაფაქტორების შედეგად წარმოქმნილი ჯგუფი.

თეორემა 4.2.1.: (4.2.2.) ლამეს განტოლების მონოდრომიის ჯგუფი უნიტარულია $\Leftrightarrow$ I და IV წრეწირის რკალების შეხების წერტილითა და კოორდინატთა სათავეში ცენტრით განსაზღვრული C წრეწირი I და IV რკალებით განსაზღვრული სეგმენტების მართობულია.

დამტკიცება: რადგან z_1, z_2, z_3 წერტილების შესაბამისი ლოკალური ექსპონენტები არის 0 და 1/2. ამის გამო, ამ ლოკალური ექსპონენტების საშუალებით განსაზღვრული შიგა კუთხეები გამოდიან $\pi/2$, $\pi/2$ და $\pi/2$ რიცხვების ტოლები.
I და IV რკალების შეხების წერტილის ე. ი. ∞ წერტილის შესაბამისი ლოკალური მონოდრომია შეგვიძლია გავხადოთ ზედა სამკუთხა სახის.
$n = -1/2$-ის შესაბამისი ლამეს განტოლების ლოკალური მონოდრომია უნიტარულია $\Leftrightarrow$ I და IV რკალების შეხების წერტილთან დაკავშირებული ე. ი. ∞ წერტილის შესაბამისი ლოკალური მონოდრომიის მთავარი დიაგონალის ზემოთ და ქვემოთ მოთავსებული ელემენტები ერთმანეთის ერმიტულად შეუღლებულია $\Leftrightarrow$ I და IV რკალების შეხების წერტილთან დაკავშირებული ე. ი. ∞ წერტილის შესაბამისი ლოკალური მონოდრომიის მთავარი დიაგონალის ზემოთ და ქვემოთ მოთავსებული ელემენტები ნულებია.
ე. ი. $n = -1/2$-ის შესაბამისი ლამეს განტოლების ლოკალური მონოდრომია უნიტარულია $\Leftrightarrow$ I და IV რკალების შეხების წერტილთან დაკავშირებული ე. ი. ∞ წერტილის შესაბამისი ლოკალური მონოდრომია დიაგონალურია.
I და IV რკალების შეხების წერტილთან დაკავშირებული ე. ი. ∞ წერტილის შესაბამისი ლოკალური მონოდრომია დიაგონალურია $\Rightarrow$ I და IV რკალებს შორის კუთხე ნულის ტოლია $\Leftrightarrow$ C წრეწირი ორთოგონალურია I და IV რკალებით განსაზღვრული სეგმენტების.

C წრეწირი ორთოგონალურია I და IV რკალებით განსაზღვრული სეგმენტების $\Leftrightarrow$ I და IV რკალებს შორის კუთხე ნულის ტოლია $\Rightarrow$ არსებობს პარამეტრის მნიშვნელობა და $n = -1/2$ სწორედ ასეთი პარამეტრია, რომ I და IV რკალების შეხების წერტილთან დაკავშირებული ე. ი. ∞ წერტილის შესაბამისი ლოკალური მონოდრომია დიაგონალურია.

ე. ი. $n = -1/2$-ის შესაბამისი ლამეს განტოლების ლოკალური მონოდრომია უნიტარულია $\Leftrightarrow$ I და IV რკალების შეხების წერტილთან დაკავშირებული ე. ი. ∞ წერტილის შესაბამისი ლოკალური მონოდრომია დიაგონალურია $\Leftrightarrow$ C წრეწირი I და IV რკალებით განსაზღვრული სეგმენტების მართობულია.

დასკვნა

ნაშრომში განხილულია ლამეს განტოლება, რომელიც არის ოთხი განსაკუთრებული წერტილისა და ფიქსირებული ლოკალური ექსპონენტების მქონე მეორე რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლების კანონიკური სახე. დეტალურადაა აღწერილი ლამეს განტოლების ლოკალური მონოდრომიები, რომლებიც წარმოქმნიან ლამეს განტოლების მონოდრომიის ჯგუფს.

ნაშრომში შესწავლილია ლამეს განტოლების მონოდრომიის ჯგუფის უნიტარულობის პირობა. კერძოდ, მოყვანილია იმის პირობა, თუ როგორ შეიძლება შეირჩეს განტოლების აქსესორული პარამეტრი, რომ მონოდრომიის ჯგუფი იყოს უნიტარული.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Alexa van der Waall - Lam´e Equations with Finite Monodromy, 2002, Facultiesit wiskunde en informatica, Universiteit Utrecht.
2. F. Beukers.-Unitary monodromy of Lam´e differential operators, 2007.