ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მიშიკო ოქროპირიძე

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებების ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

კვაზი დაყვანადობის შესახებ

სამაგისტრო თეზისი

სამეცნიერო ხელმძღვანელი
ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი,
თსუ-ს პროფესორი როლანდ ომანაძე

ანოტაცია

ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ თუ M მაქსიმალური სიმრავლეა,
და A მისი მთავარი ქვესიმრავლე და B, C ნებისმიერი სიმრავლეებია და
$B \leq_{Q_1} M \backslash A$, $C \leq_{Q_1} M \backslash A$ და $M \backslash A \leq_{Q_1} B \oplus C$, მაშინ
$M \backslash A \leq_m B$ ან $M \backslash A \leq_m C$

Ivane Javakhishvili Tbilisi State University

Mishiko Okropiridze

Faculty of Exact and Natural Sciences

Department of Mathematics

On Quasi-reducibility

Master Thesis

Advisor

Roland Omanadze - Professor of Matematics,

Ivane Javakhisvhili Tbilis State University

Abstract

We show that if M is a maximal set, A is its major subset, and B, C are arbitrary sets such that $B \leq_{Q_1} M \backslash A$, $C \leq_{Q_1} M \backslash A$, and $M \backslash A \leq_{Q_1} B \oplus C$, then $M \backslash A \leq_m B$ or $M \backslash A \leq_m C$.

შინაარსი

შესავალი

მათემატიკური ლოგიკის ერთ-ერთი თანამედროვე და სწრაფად განვითარებადი დარგია ალგორითმების თეორია (რეკურსიულ ფუნქციათა თეორია). XX საუკუნის 30-იან წლებში ჩარჩის, კლინის, ტიურინგის და გეოდელის შრომებში მიღებული იქნა ფუძემდებლური ფაქტები ალგორითმების ბუნების შესახებ. დამტკიცდა გამოთვლადი ფუნქციის ცნების სხვადასხვა დაზუსტების ეკვივალენტობა, ფორმულირდა ჩარჩის თეზისი, დამტკიცდა თეორემა უნიკალური ფუნქციის შესახებ, $s-m-n$-თეორემა და რეკურსიის (უძრავი წერტილის შესახებ) თეორემა. ამის საფუძველზე მოხერხდა მათემატიკის მრავალი ცნობილი, უმნიშვნელოვანესი, ალგორითმული პრობლემის ამოუხსნადობის (გადაუწყვეტადობის) დამტკიცება. ამ ყველაფერმა მიგვიყვანა ალგორითმების თეორიის სწრაფ განვითარებამდე, რომელიც დღემდე გრძელდება. ამ დარგის უმნიშვნელოვანესი მიმართულების რეკურსიულად გადათვლად (რ.გ.) სიმრავლეთა და ამოუხსნადობის ხარისხების თეორიის საწყისები შეიქმნა XX საუკუნის 40-50-იან წლებში. ამ დროს გამოქვეყნდა პოსტის ფუნდამენტური ნაშრომი ([1]).

ყოველი A სიმრავლისთვის, სადაც $A \subseteq \omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, შეიძლება ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი პრობლემა: არსებობს თუ არა ალგორითმი, რომელიც ყოველ $x \in \omega$-სთვის უპასუხებს კითხვას: $x \in A$? სიმრავლეს, რომლისთვისაც მოცემული პრობლემა გადაწყვეტადია, ეწოდება რეკურსიული. გაირკვა, რომ არსებობს სხვადასხვა "სირთულის" რ.გ. სიმრავლე, რომელიც არ არის რეკურსიული. ასეთი სიმრავლეები გახდა შემდგომი შესწავლის ძირითადი ობიექტები.

ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლის ყველა რ.გ. ქვესიმრავლეთა სიმრავლის მათი "სირთულის" მიხედვის კლასიფიკაციის ძირითად ინსტრუმენტს წარმოადგენს დაყვანადობის ცნება, რომელიც არის ალგორითმების თეორიის ერთ-ერთი ფუნდამენტური ცნება.

ვთქვათ $A, B \subseteq \omega$. ინტუიცურ დონეზე, A სიმრავლე დაყვანადია B სიმრავლეზე, თუ არსებობს ისეთი ალგორითმი, რომელიც გადაწყვეტდა პრობლემას A-სთვის ელემენტის კუთვნილების შესახებ იმ პირობით, რომ არსებობს შესაძლებლობა ვისარგებლოთ ინფორმაციით რაიმე B-სთვის კუთვნილების შესახებ. ყველაზე ზოგადი ფორმით ასეთ დაყვანადობას ეწოდება ტიურინგის დაყვანადობა ($T-$დაყვანადობა), რომელიც განსაზღვრა პოსტმა [1944]-ში, $T-$დაყვანადობასთან ერთად, პოსტმა [1940] განსაზღვრა $m-$, $btt-$, და $tt-$ დაყვანადობების ცნებები.

თითოეული ამ დაყვანადობებიდან ფლობს რეფლექსურობის, ანტისიმეტრიულობის და ტრანზიტულობის თვისებებს. თუ $r-$ არის რომელიმე სახის დაყვანადობა, მაშინ A და B სიმრავლეები არიან $r-$ეკვივალენტური ($A \equiv_r B$), თუ $A \leq_r B$ & $B \leq_r A$. A სიმრავლის

$r-$ეკვივალენტურ სიმრავლეთა კლასს ეწოდება A სიმრავლის $r-$ხარისხი და აღინიშნება

$$\deg_r(A) = \{B : B \equiv_r A\}$$

ამოუხსნადობის $r-$ხარისხებზე ბუნებრივად ინდუცირდება ნაწილობრივად დალაგების მიმართება, რომელსაც აღვნიშნავთ $\leq_r$-ით. $r-$ხარისხს ეწოდება რეკურსიული(რეკურსიულად გადათვლადი), თუ ის ერთ რეკურსიულ(რეკურსიულად გადათვლად) სიმრავლეს მაინც შეიცავს.

A სიმრავლეს ეწოდება $r-$**სრული**, თუ

(1) $A-$ რ.გ.

(2) $\forall B\,(B -$ რ.გ. $\Rightarrow B \leq_r A)$

ემილ პოსტმა დასვა პრობლემა: არსებობს თუ არა არარეკურსიული, არა $T-$სრული რ.გ. $T-$ხარისხი? პოსტი ამ პრობლემის ამოსახსნელად, შეეცადა განესაზღვრა რ.გ. სიმრავლეთა კლასი, რომელიც არასრულობის და არარეკურსიულობის გარანტიას მოგვცემდა. ის კონცენტრირდა, რომ შეესუსტებინა რ.გ. სიმრავლის დამატების თვისებები. ამისათვის მან განსაზღვრა მარტივი და ჰიპერმარტივი სიმრავლეები. ამგვარი მიდგომა აღმოჩნდა განწირული (იეტსი [1965]), მაგრამ პოსტის პირველადმა შრომამ ბიძგი მისცა რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეების სტრუქტურების და გამოთვლადობის კომპლექსურობის შესწავლას. პოსტის პრობლემის გადაჭრა კი სხვა მეთოდით მოხერხდა.

ფრიდბერგმა[1957] და მუჩნიკმა [1956] ერთმანეთისგან დამოუკიდებლად გადაჭრეს პრობლემა ეპოვათ არარეკურსიული, და არა ტიურინგის აზრით სრული ხარისხი. მათ შექმნეს ახალი ტექნიკა, რომელსაც დაერქვა პრიორიტეტის მეთოდი. მიღებული კონსტრუქცია აღმოჩნდა ძალზედ ნაყოფიერი. მისი დახმარებით გადაიჭრა სხვადასხვა პრობლემებიც რეკურსიის თეორიასა და მათემატიკურ ლოგიკაში.

მითითებული დაყვანადობების შესწავლის პარალელურად, სხვადასხვა ავტორის მიერ განსაზღვრული იყო განსხვავებული ტიპის დაყვანადობა. კერძოდ, ტენენბაუმმა (იხ. როჯერსი [2]), შემოიტანა კვაზი-დაყვანადობის ($Q-$ დაყვანადობის) შემდეგი ცნება.

ამ ნაშრომში ჩვენ განვიხილავთ კვაზი დაყვანადობას $(Q-)$, რომელიც ძალიან ბუნებრივი და მნიშვნელოვანია ალგორითმების თეორიისთვის. მისი დახმარებით მიიღება რიგი საინტერესო და მნიშვნელოვანი შედეგები. კერძოდ, დამტკიცებულია, რომ რეკურსიულად გადათვლადი $Q-$ხარისხებისა და რეკურსიულად გადათვლადი T-ხარისხების ზედა ნახევარმესერების ელემენტარული თეორიები არიან ერთმანეთისაგან განსხვავებულები (იხ. [3]). ნაჩვენებია, რომ რ.გ. $Q-$ხარისხების ზედა ნახევარმესერი მკვრივადაა დალაგებული (იხ. [4]). ასევე პირველად მარჩენკოვმა (იხ. [5]) $Q-$დაყვანადობის დახმარებით გადაწყვიტა პოსტის პრობლემა. $Q-$დაყვანადობას აქვს ძალიან მნიშვნელოვანი გამოყენება ალგორითმების

თეორიის სხვადასხვა დარგში, მაგალითად, სიტყვათა ტოლობის პრობლემისა და გამოთვლადობის სირთულეების შესწავლისას. $Q-$დაყვანადობის მიმართება სიტყვათა ტოლობის პრობლემასთან ნათლად ჩანს დობრიცას თეორემაში (იხ. [6]), რომელიც ამბობს, რომ ნატურალურ რიცხვთა ყოველი A სიმრავლისთვის არსებობს სიტყვათა ტოლობის პრობლემა, რომელსაც აქვს იგივე $Q-$ხარისხი, რაც აქვს A-ს. ბლამმა და მარქუსმა (იხ. [7]) შემოიტანეს სუბკრეატიული და ეფექტურად აჩქარებადი სიმრავლეების ცნებები და აჩვენეს, რომ სიმრავლე არის სუბკრეატიული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის არის ეფექტურად აჩქარებადი. ჯილმა და მორისმა (იხ. [8]) მოგვცეს მარტივი დახასიათება ეფექტურად აჩქარებადი სიმრავლეებისა $Q-$ დაყვანადობის ტერმინებში. მათ დაამტკიცეს, რომ სიმრავლე არის ეფექტურად აჩქარებადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ის არის $Q-$სრული. აქ მოყვანილი შედეგებიდან ჩანს, რომ $Q-$ დაყვანადობა არის ერთ-ერთი დამაკავშირებელი ხიდი, რომელიც აერთებს ალგორითმების დესკრიფციულ და მეტრიკულ თეორიებს.

1 ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეები და Q-დაყვანადობა

ვთქვათ $A, B \subseteq \omega$, სადაც $\omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

განსაზღვრება 1.1. (**ტენენბაუმი**) A არის Q-დაყვანადი B-ზე ($A \leq_Q B$) თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია f, რომ ყოველი x-ისთვის ω-დან

$$x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B$$

განსაზღვრება 1.2. A სიმრავლის ტიურინგის ხარისხი (ამოუხსნადობის ხარისხი) ეწოდება სიმრავლეთა კლასს

$$\mathbf{deg}_T(A) = \{B : A \equiv_T B\}$$

ანალოგიურად განისაზღვრება $Q-$ დაყვანადობის ხარისხები

$$\mathbf{deg}_Q(A) = \{B : A \equiv_Q B\}$$

განსაზღვრება 1.3. (**პოსტი**) უსასრულო A სიმრავლეს ეწოდება **იმუნური**, თუ არ არსებობს ისეთი უსასრულო რ.გ. სიმრავლე W, რომ $W \subseteq A$.

განსაზღვრება 1.4. რ.გ. A სიმრავლეს ეწოდება **მარტივი**, თუ $\overline{A}$ იმუნურია.

თეორემა 1.5. არსებობს $2^{\aleph_0}$ სიმრავლე, ისეთი რომ A და $\overline{A}$ იმუნურია.

დამტკიცება. ვთქვათ $x_0, x_1, \ldots$ ზრდის მიხედვით დალაგებული ელემენტებია $\{x \mid W_x \text{ უსასრულო}\}$ სიმრავლის. განვსაზღვროთ წყვილები $\{y_0, z_0\}, \{y_1, z_1\}, \ldots$ შემდეგნაირად:

$$\{y_0, z_0\} = \text{ორი უმცირესი ელემენტი } W_{x_0}\text{-ის},$$

სადაც $y_0 < z_0$.

$\{y_{k+1}, z_{k+1}\} =$ ორი უმცირესი ელემენტი $W_{x_{k+1}}$-ის, ისეთი, რომ ორივე აღემატება y_k და z_k-ს,

სადაც $y_{k+1} < z_{k+1}$. ჩვენ განვსაზღვროთ სიმრავლე A-ს შემდეგნაირად, ამოვირჩევთ თითოეულ წევრს წყვილთა მიმდევრობიდან. ვინაიდან არსებობს $2^{\aleph_0}$ უნიკალური ამორჩევა, მაშინ ორივე A და $\overline{A}$ უნდა კვეთდეს უსასრულო რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეს. მაშასადამე, ორივე A და $\overline{A}$ იმუნურია. □

განსაზღვრება 1.6. $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ სიმრავლის, სადაც $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, კანონიკური ინდექსი ეწოდება

$$y = 2^{x_1} + 2^{x_2} + \ldots + 2^{x_n}$$

განსაზღვრება 1.7. სასრულ სიმრავლეთა მიმდევრობას $\{F_n\}_{n\in\omega}$ ეწოდება **ძლიერი**, თუ არსებობს, ისეთი რეკურსიული ფუნქცია f, რომ

$$F_n = D_{f(n)},\ \text{ყოველი } n \in \omega$$

სადაც D_u არის სიმრავლე რომლის კანონიკური ინდექსია u

განსაზღვრება 1.8. A სიმრავლეს ეწოდება **ჰიპერიმუნური** თუ არ არსებობს ისეთი f რეკურსიული ფუნქცია, რომ

(1) $(\forall x)(\forall y)(x \neq y \Rightarrow D_{f(x)} \cap D_{f(y)} = \emptyset)$

(1) $(\forall x)(D_{f(x)} \cap A \neq \emptyset)$

(3) $(\forall x)|D_{f(x)}| < \infty$

განსაზღვრება 1.9. რეკურსიულად გადათვლად A სიმრავლეს ეწოდება **ჰიპერმარტივი** თუ $\overline{A}$ **ჰიპერიმუნურია**

განსაზღვრება 1.10. სასრულ სიმრავლეთა მიმდევრობას $\{F_n\}_{n\in\omega}$ ეწოდება **სუსტი** მიმდევრობა თუ არსებობს, ისეთი რეკურსიული ფუნქცია f, რომ

$$F_n = W_{f(n)},\ \text{ყოველი } n \in \omega$$

სადაც W_u არის რ.გ. სიმრავლე, რომლის გეოდელის ინდექსია u

განსაზღვრება 1.11. A სიმრავლეს ეწოდება **ჰიპერჰიპერიმუნური** თუ არ არსებობს ისეთი f რეკურსიული ფუნქცია, რომ

(1) $(\forall x)(\forall y)(x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset)$

(2) $(\forall x)(W_{f(x)} \cap A \neq \emptyset)$

(3) $(\forall x)|W_{f(x)}| < \infty$

განსაზღვრება 1.12. რეკურსიულად გადათვლად A სიმრავლეს ეწოდება **ჰიპერჰიპერმარტივი** თუ $\overline{A}$ **ჰიპერჰიპერიმუნურია**

განსაზღვრება 1.13. M სიმრავლეს ეწოდება **მაქსიმალური** თუ $\overline{M}$ **კოჰესიურია**

განსაზღვრება 1.14. A სიმრავლე **კოჰესიურია** თუ არ არსებობს რ.გ. W სიმრავლე, ისეთი, რომ

$$|W \cap A| = \left|\overline{W} \cap A\right| = \infty$$

წინადადება 1.1. (**ფრიდბერგი**) მაქსიმალური სიმრავლე ჰიპერჰიპერმარტივია

დამტკიცება. ვთქვათ M მაქსიმალურია და არაა ჰიპერჰიპერმარტივი, მაშინ იარსებებს წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სუსტი მიმდევრობა $\{W_{f(x)}\}_{x\in\omega}$ ისეთი რომ ყოველი x-ისთვის ω-დან

$$W_{f(x)} \cap \overline{M} \neq \emptyset$$

გამოვყოთ ლუწ ინდექსიანი ქვემიმდევრობა, ანუ

$$A = \bigcup_{x\in\omega} W_{f(2x)}$$

A უსასრულო რ.გ სიმრავლეა და $A \cap \overline{M}$ და $\overline{A} \cap \overline{M}$ არის უსასრულო. რაც ეწინააღმდეგება M-ის მაქსიმალურობას. $\square$

თეორემა 1.15. A არის ჰიპერჰიპერმარტივი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ ის არის კო-უსასრულო რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლე, და არ არსებობს რეკურსიული ფუნქცია f ისეთი, რომ

(1) $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} \cap \overline{A} = \emptyset$

(2) $W_{f(x)} \cap \overline{A} \neq \emptyset$

დამტკიცება. დავუშვათ ასეთი f არსებობს. პირველ რიგში ავაგოთ g რეკურსიული ფუნქცია, თვისებებით:

(1) $x \neq y \Rightarrow W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset$

(2) $W_{g(x)} \cap \overline{A} \neq \emptyset$

ამისათვის განვსაზღვროთ შემდეგი პროცედურა ეტაპობრივად:

ეტაპი 0: $W_{g(0)}$-ს მივანიჭოთ პირველი ელემენტი $W_{f(0)}$ გადათვლიდან.

ეტაპი $(s > 0)$: გადავთვალოთ $W_{f(0),s}, \ldots W_{f(s),s}$ ერთდროულად და ელემენტი $W_{f(x)}$-დან გადავცეთ $W_{g(x)}$, თუ სხვა $W_{g(y)}$-ში ჯერ კიდევ არ გადაგვიცია

მაშასადამე, $x \neq y$, $W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset$ და ვინაიდან, $W_{f(x)} \cap \overline{A} \neq \emptyset$, გვექნება, რომ $W_{g(x)} \cap \overline{A} \neq \emptyset$, ვინაიდან $\overline{A}$-ზე $W_{f(x)}$-ები თანაუკვეთები არიან.

შემდეგ ავაგოთ h რეკურსიული ფუნქცია g-ზე დაყრდნობით, ისეთი, რომ ყოველი x-ისთვის მივიღოთ $W_{h(x)}$ სასრული. ანალოგიურად დავიწყოთ ეტაპობრივად $W_{g(x)}$ და A-ს გადათვლა, თითოეულ ეტაპზე $W_{g(x)}$-ის ელემენტი გადავცეთ $W_{h(x)}$-ში, თუ არ არსებობს z რომელიც დაგენერირდა $W_{h(x)}$ და ჯერ კიდევ არ შეგვხვედრია A-ს გადათვლაში. (ეს არის

დროებითი შეზღუდვა, რომელიც შემდგომ ეტაპებზე შესაძლოა მოიხსნას, თუ z დაგენერირდება A -ში.) ვინაიდან $W_{g(x)} \cap \overline{A} \neq \emptyset$, როგორც კი თანაკვეთის პირველივე ელემენტი დაგენერირდება $W_{h(x)}$-ში, პროცედურა ჩერდება. მაშასადამე, $W_{h(x)}$ სასრულია. მაგრამ ვინაიდან ასეთი ელემენტი გადაეცა $W_{h(x)}$-ს, მაშასადამე, $W_{h(x)} \cap \overline{A} \neq \emptyset$. $\square$

განსაზღვრება 1.16. A სიმრავლე არის Q-სრული მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ $\mathcal{K} \leq_Q A$

თეორემა 1.17. ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლე **არაა** Q-სრული.

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ A არის Q-სრული სიმრავლე, და $x \in \mathcal{K} \iff W_{g(x)} \subseteq A$. ზოგადობის შეუზღუდავად ვიგულისხმოთ რომ $W_{g(x)}$ სასრულია.
ვაჩვენოთ, რომ A არაა ჰიპერჰიპერმარტივი. ავაგოთ f რეკურსიული ფუნქცია შემდეგნაირად, დავუშვათ, რომ უკვე გვაქვს აგებული $W_{f(0)}, \ldots, W_{f(n)}$, სასრული სიმრავლეები. და გვინდა, რომ ავაგოთ $W_{f(n+1)}$ სასრული ისეთი, რომ

(1) $W_{f(n+1)} \cap \overline{A} \neq \emptyset$

(2) $W_{f(n+1)} \cap \left(\bigcup\limits_{i \leq n} W_{f(i)} \right) = \emptyset$

განვსაზღვროთ რ.გ. სიმრავლე $B \subseteq \overline{\mathcal{K}}$ ისეთი, რომ

$$x \in B \Rightarrow W_{g(x)} \cap \left(\bigcup_{i \leq n} W_{f(i)} \right) = \emptyset.$$

ვინაიდან B რ.გ. სიმრავლეა, მაშასადამე, $(\exists a)(a \in \omega)(B = W_a)$, და მაშასადამე:

$$B = W_a \subseteq \overline{\mathcal{K}} \Rightarrow a \in \overline{\mathcal{K}} - B,$$

განვსაზღვროთ $f(n+1) = g(a)$, ვინაიდან $W_{g(a)} \cap \overline{A} \neq \emptyset$. მაშასადამე, ორივე პირობა იქნება დაკმაყოფილებული.

ასევე იმისათვის, რომ $B \subseteq \overline{\mathcal{K}}$ უნდა შესრულდეს შემდეგი პირობა:

$$x \in B \Rightarrow W_{g(x)} \cap \overline{A} \neq \emptyset.$$

ყოველივე ამის გათვალისწინებით B-ს განვსაზღვრავთ შემდეგნაირად

$$x \in B \iff W_{g(x)} \cap \overline{A} \cap \left(\bigcup_{i \leq n} W_{f(i)} \right) \neq \emptyset.$$

ეს გვაძლევს სიმრავლეთა თანაუკვეთ მიმდევრობას $\overline{A}$-ზე და თეორემა 1.15-ის თანახმად A არაა ჰიპერჰიპერმარტივი. ვინაიდან $\overline{A}$ არაა რეკურსიულად გადათვლადი, გვექნება, რომ

$$x \in B \iff (\exists s \geq x) \left[W_{g(x),s} \cap \overline{A_s} \cap \left(\bigcup_{i \leq n} W_{f(i),s} \right) \neq \emptyset \right].$$

$s \geq x$ ვინაიდან, $\bigcup\limits_{i \leq n} w_{f(i)}$ სასრულია, და შესაბამისად საკმარისად დიდი x ისათვის (და ანალოგიურად s-ისთვის) ჭეშმარიტი იქნება, რომ x არის $\mathcal{K}$-ში, როდესაც x არის B-ში. ვინაიდან იარსებებს ეტაპი s_0, რომ სასრული სიმრავლის $A \cap \left(\bigcup\limits_{i \leq n} W_{f(i)} \right)$ ყველა ელემენტი დაგენერირებულია, და ყოველი $s \geq s_0$-ისთვის, $\overline{A_s} \cap \left(\bigcup\limits_{i \leq n} W_{f(i),s} \right)$-ის ყველა ელემენტი არ იქნება A-ში, და, მაშასადამე, იქნება $\overline{A} \cap \left(\bigcup\limits_{i \leq n} W_{f(i)} \right)$-ში.

ე.ი, ყოველი $x \geq s_0$-ისთვის , თუ x არის B-ში, მაშინ ის არის $W_{g(x)} \cap \overline{A} \cap \left(\bigcup\limits_{i \leq n} W_{f(i)} \right)$-ში, და, მაშასადამე, ის არის $\mathcal{K}$-ში, ვიანიდან $W_{g(x)} \cap \overline{A} \neq \emptyset$. საიდანაც გვექნება, რომ თითქმის ყველა x-ისთვის $B \subseteq \mathcal{K}$.

ვინაიდან B რეკურსიულად გადათვლადია, იარსებებს ისეთი ინდექსი a_0, რომ $B = W_{a_0}$. თუ $a_0 \in \overline{B}$ მაშინ, $\mathcal{K}$-ს განსაზღვრების თანახმად, $a_0 \in \overline{\mathcal{K}}$, რაც გვჭირდებოდა, მაგრამ თუ $a_0 \in B$ მაშინ განვიხილოთ $W_{a_1} = B - \{a_0\}$, და ვნახოთ თუ $a_1 \in W_{a_1}$, და ა.შ. მაშასადამე გვექნება სასრული მიმდევრობა $a_0, a_1, \ldots$ და იარსებებს $a_{n_0} \notin W_{n_0}$. განვსაზღვროთ $W_{f(n+1)} = \bigcup W_{g(a_{n_0})}$, რისი მიღწევაც გვინდოდა, და მაშასადამე A არაა ჰიპერჰიპერმარტივი. □

თეორემა 1.18. კო-უსასრულო რ.გ. სიმრავლე A არის ჰიპერჰიპერმარტივი, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არ არსებობს Q-სრული სიმრავლე B ისეთი, რომ $A \subseteq B$.

დამტკიცება. თუ $A \subseteq B$ არის ჰიპერჰიპერმარტივი, მაშინ B არის ჰიპერჰიპერმარტივი ან კო-უსასრულო, და მაშასადამე არაა Q-სრული.
თუ A არაა ჰიპერჰიპერმარტივი, მაშინ არსებობს f რეკურსიული ფუნქცია, ისეთი, რომ

(1) $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} \cap \overline{A} = \emptyset$

(2) $W_{f(x)} \cap \overline{A} \neq \emptyset$

მაშასადამე

$$B = A \cup \left(\bigcup_{x \in \mathcal{K}} W_{f(x)} \right)$$

და B არის Q-სრული, და მოიცავს A-ს. □

თეორემა 1.19. მაქსიმალური M სიმრავლის Q-ხარისხში არსებობს უმცირესი m-ხარისხი, რომელიცაა $\deg_m(M)$. ე.ი გვაქვს, რომ $M \equiv_Q A \Rightarrow M \leq_m A$, სადაც A ნებისმიერი სიმრავლეა. (იხ. [3])

განსაზღვრება 1.20. არითმეტიკული იერარქია

(1) სიმრავლე A არის $\Sigma_0(\Pi_0)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ A რეკურსიულია

(2) ყოველი $n \geq 1$, A არის Σ^0_n-ში (ჩავწერთ $A \in \Sigma^0_n$), თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული მიმართება $R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, რომ

$$x \in A \iff (\exists y_1)(\forall y_2)\ldots(Qy_n)R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

სადაც Q არის $\forall$ თუ n კენტია, $\exists$-როდესაც ლუწია. ანალოგიურად $A \in \Pi^0_n$, თუ

$$x \in A \iff (\forall y_1)(\exists y_2)\ldots(Qy_n)R(x, y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

სადაც Q არის $\exists$ თუ n კენტია, $\forall$-როდესაც ლუწია.

(3) $A \in \Delta_n$ თუ $A \in \Sigma^0_n \cap \Pi^0_n$

(4) A ეწოდება არითმეტიკული თუ $A \in \bigcup\limits_n \left(\Sigma^0_n \cup \Pi^0_n\right)$

თეორემა 1.21. (იხ. [9, III.4.3 p. 282]) არსებობს უმცირესი Q ხარისხი, რომელიც შეიცავს ყველა Π^0_1 სიმრავლეს

დამტკიცება. თუ $A \in \Pi^0_1$ და $B \neq \omega$ ნებისმიერი სიმრავლეა და $b \in B$ რაიმე ფიქსირებული წერტილია, განვსაზღვროთ რეკურსიული f ფუნქცია შემდეგნაირად:

$$W_{f(x)} = \begin{cases} \{b\}, & \text{თუ } x \notin A \\ \emptyset, & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში} \end{cases}$$

მაშასადამე, $x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B$
ე.ი. $A \leq_Q B$. $\square$

2 მაქსიმალური სიმრავლის მთავარი ქვესიმრავლეები და Q_1 დაყვანადობა

ამ პარაგრაფში ჩვენ შევისწავლით მაქსიმალური სიმრავლის მთავარი ქვესიმრავლის ზოგიერთ თვისებას.

რეკურსიულად გადათვლად სიმრავლეს $A \subseteq B$ ეწოდება მთავარი თუ $B \backslash A$ უსასრულოა და ყველა რეკურსიულად გადათვლადი W სიმრავლისთვის

$$B \subseteq^* W \Rightarrow A \subseteq^* W$$

ლახლანმა [10] აჩვენა, რომ ყველა არარეკურსიულ, რეკურსიულად გადათვლას სიმრავლეს აქვს მთავარი ქვესიმრავლე.

განსაზღვრება 2.1. A არის Q_1 დაყვანადი B-ზე ($A \leq_{Q_1} B$) თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული ფუნქცია f, რომ ყოველი x-ისთვის ω-დან

(1) $x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B$

(2) $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$

თეორემა 2.2. ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლის Q-ხარისხი შეიცავს უსასრულო Q_1-ხარისხებს, წრფივად დალაგებულს $\leq_{Q_1}$-ით, რომლის ტიპი ემთხვევა $\mathbb{Z}$-ს

ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი ლემა

ლემა 2.3. ვთქვათ A და B რ.გ. სიმრავლეა ისეთი, რომ

$$B = A \cup \{m\}$$

სადაც $m \in \overline{A}$. მაშინ

(I) A ჰიპერჰიპერმარტივია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც B ჰიპერჰიპერმარტივია.

(II) თუ A ჰიპერჰიპერმარტივია

$$B \leq_{Q_1} A \quad \text{და} \quad A \leq_m B \quad \text{და} \quad A \nleq_{Q_1} B.$$

დამტკიცება. (I) ნაწილი პირდაპირ გამომდინარეობს ლალხანის ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეების დახასიათებიდან (იხ. [2] თეორემა 12.XX)

ვაჩვენოთ (II) ნაწილი. $B \leq_{Q_1} A$ და $A \leq_m B$ დაყვანადობა ნაჩვენებია ზემოხსენებულ დეკერის თეორემაში, m-ხარისხებზე.

დავუშვათ, რომ $A \leq_{Q_1} B$ რეკურსიული f ფუნქციით, ე.ი. ყოველი x და y-ისთვის,

$$x \in A \iff W_{f(x)} \subseteq B$$

და

$$x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset.$$

ჩვენ განვსაზღვრავთ რეკურსიულ ფუნქცია g-ს ინდუქციით, შემდეგნაირად

$$W_{g(0)} = W_{f(m)} \setminus \{m\},$$

$$W_{g(n+1)} = \bigcup_{i \in W_{g(n)} \setminus \{m\}} W_{f(i)}.$$

და ვაჩვენებთ, რომ ყოველი x და y-ისთვის,

$$x \neq y \Rightarrow W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset.$$

g-ს განსაზღვრების თანახმად ჭეშმარიტია, რომ ყოველი $i > 0$, $W_{g(i)} \cap W_{g(0)} = \emptyset$

დავუშვათ, რომ ყოველი i, $0 \leq i < n$,

$$W_{g(i)} \cap W_{g(n)} = \emptyset$$

და ვაჩვენოთ, რომ k, $0 \leq k \leq n$,

$$W_{g(k)} \cap W_{g(n+1)} = \emptyset.$$

ვთქვათ, რომელიღაც k, $0 < k \leq n$ და გვაქვს, რომ:

$$W_{g(k)} \cap W_{g(n+1)} \neq \emptyset,$$

მაშინ,

$$\left(\bigcup_{i \in W_{g(k-1)}\ i \neq m} W_{f(i)} \right) \cap \left(\bigcup_{i \in W_{g(n)}\ i \neq m} W_{f(i)} \right) \neq \emptyset.$$

ვინაიდან, ყოველი x და y-ისთვის,

$$x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset,$$

მაშასადამე გვექნება, რომ

$$(\exists i) \left(i \in W_{g(n)} \cap W_{g(k-1)} \right),$$

მივიღეთ წინააღმდეგობა. ე.ი. ყოველი x და y-ისთვის,

$$x \neq y \Rightarrow W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset.$$

ახლა ვაჩვენოთ, რომ ყოველი x-ისთვის,

$$W_{g(x)} \cap \overline{B} \neq \emptyset.$$

$n = 0$-ისთვის გვაქვს, რომ

$$W_{g(0)} \cap \overline{B} = W_{f(m)} \cap \overline{B} \neq \emptyset.$$

დავუშვათ $W_{g(n)} \cap \overline{B} \neq \emptyset$. მაშინ არსებობს $x \in W_{g(n)} \cap \overline{B}$ და g განსაზღვრების თანახმად, გვექნება, რომ

$$W_{g(n+1)} \cap \overline{B} \supseteq W_{f(x)} \cap \overline{B} \neq \emptyset.$$

მაშასადამე $\{W_{g(x)}\}_{x\in\omega}$ არის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი სასრულ სიმრავლეთა მიმდევრობა, რომელიც აჩვენებს, რომ B არაა ჰიპერჰიპერმარტივი, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

ვთქვათ A ჰიპერჰიპერმარტივი სიმრავლეა. $\{a_0, a_1, \ldots\}$ იყოს A-ს უსასრულო ქვესიმრავლე და $\{b_0, b_1, \ldots\}$ $\overline{A}$-ის უსასრულო ქვესიმრავლე. მაშინ, ლემა 2.3-ის თანახმად

$$\ldots, A \cup \{b_0, b_1\}, A \cup \{b_0\}, A, A \setminus \{a_0\}, A \setminus \{a_0, a_1\}, \ldots$$

რაც გვაძლევს Q_1-ხარისხების წრფივ დალაგებას $\mathbb{Z}$-ტიპით. ასევე, (I)-ის თანახმად ყოველი Q_1-ხარისხი შეიცავს მხოლოდ ჰიპერჰიპერმარტივ სიმრავლეებს.

□

თეორემა 2.4. თუ M მაქსიმალური სიმრავლეა, A მისი მთავარი ქვესიმრავლე და B, C ნებისმიერი სიმრავლეებია და

$$B \leq_{Q_1} M\backslash A, \;\; C \leq_{Q_1} M\backslash A, \;\; M\backslash A \leq_{Q_1} B \oplus C$$

მაშინ $M\backslash A \leq_m B$ ან $M\backslash A \leq_m C$

დამტკიცება. ვთქვათ M, A, B, C აკმაყოფილებს თეორემის პირობებს, და

$$g : B \leq_{Q_1} M\backslash A$$
$$h : C \leq_{Q_1} M\backslash A$$
$$f : M\backslash A \leq_{Q_1} B \oplus C$$

ლემა 2.5. თუ $A \subseteq M$ მთავარი ქვესიმრავლეა M მაქსიმალური სიმრავლის, მაშინ ყოველი ნაწილობრივად რეკურსიული φ ფუნქციისთვის, რომლისთვისაც $\varphi(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა, სამართლიანია

$$\varphi(\overline{M}) \subseteq^* \overline{M} \quad \text{და} \quad \{x : x \in \overline{M} \;\&\; \varphi(x) \in \overline{M} \;\&\; \varphi(x) \neq x\} \text{ სასრულია}$$

დამტკიცება. დავუშვათ φ ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქციაა და $\varphi(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა. კობზევმა [11] აჩვენა, რომ r-მაქსიმალური სიმრავლისთვის და ყოველი რეკურსიული ფუნქცია h-ისთვის

$$\{h(x) : x \in \overline{M} \,\&\, h(x) \in \overline{M} \,\&\, h(x) \neq x\} - \text{სასრულია.}$$

კობზევის შედეგით და ჩვენი დაშვებებით გვექნება, რომ

$$|\{\varphi(x) : x \in \overline{M} \,\&\, \varphi(x) \in \overline{M} \,\&\, \varphi(x) = x\}| = \infty.$$

თუ დავუშვებთ, რომ

$$|\{x : x \in \overline{M} \,\&\, \varphi(x) \in \overline{M} \,\&\, \varphi(x) \neq x\}| = \infty$$

მივიღებთ წინააღმდეგობას, ვინაიდან რეკურსიული სიმრავლეები

$$\{x : \varphi(x) = x\}, \quad \{x : \varphi(x) \neq x\}$$

გახლეჩს $\overline{M}$-ს ორ უსასრულო ნაწილად.

მაშასადამე, ყოველი ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია φ-ისთვის, თუ $\varphi(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა, მაშინ

$$\{x : x \in \overline{M} \,\&\, \varphi(x) \in \overline{M} \,\&\, \varphi(x) \neq x\} - \text{სასრულია.}$$

ასევე, თუ $\varphi(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა და დავუშვებთ, რომ

$$\{x : x \in \overline{M} \,\&\, \varphi(x) \notin \overline{M}\}$$

უსასრულოა, მაშინ გვექნება, რომ

$$\{x : x \in \overline{M} \,\&\, \varphi(x) \neq x\}$$

უსასრულოა და ისევ, რეკურსიულად გადათვლადი სიმრავლეები

$$\{x : \varphi(x) = x\}, \quad \{x : \varphi(x) \neq x\}$$

გახლეჩს $\overline{M}$-ს ორ უსასრულო ნაწილად. მაშასადამე,

$$\{x : x \in \overline{M} \,\&\, \varphi(x) \neq x\} \text{ სასრულია}$$

და $\varphi(\overline{M}) \subseteq^* \overline{M}$. □

ლემა 2.6. თუ $A \subseteq M$ მთავარი ქვესიმრავლეა M მაქსიმალური სიმრავლის, მაშინ ყოველი ნაწილობრივად რეკურსიული φ ფუნქცია, რომლისთვისაც $\varphi(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა სამართლიანია

1. $\{x : x \in \overline{M} \,\&\, \varphi(x) \in \overline{M} \,\&\, \varphi(x) \neq x\}$ სასრულია.

2. $\{x : x \in M \backslash A \,\&\, \varphi(x) \in M \backslash A \,\&\, \varphi(x) \neq x\}$ სასრულია.

3. $\varphi(M \backslash A) \subseteq^* M \setminus A$.

დამტკიცება.

(1) პირდაპირი შედეგია ლემა 2.5-ის.

(2) ვინაიდან φ ნაწილობრივად რეკურსიულია და $\varphi(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა, მაშინ (1)-დან გვაქვს, რომ თითქმის ყველა x-სთვის, $\varphi(x) = x$. მაშასადამე, $W = \{x : \varphi(x) = x\}$ რეკურსიულად გადათვლადია და $\overline{M} \subset^* W \Rightarrow \overline{A} \subseteq^* W \Rightarrow M \backslash A \subseteq^* W$. ე.ი თითქმის ყველა $x \in M \backslash A$-სთვის, $\varphi(x) = x$.

(3) შედეგი პირდაპირ (1) და (2)-დან.

$\square$

შედეგი 2.7. თუ M მაქსიმალური სიმრავლეა და A მისი მთავარი ქვესიმრავლეა, მაშინ თითქმის ყველგან განსაზღვრული ნაწილობრივად რეკურსიული φ ფუნქციისთვის, თუ $\varphi(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა, მაშინ $\varphi(\overline{M}) \subseteq^* \overline{M}$ და

1. $\{x : x \in M \,\&\, \varphi(x) \in M \,\&\, \varphi(x) \neq x\}$ სასრულია.

2. $\{x : x \in M \backslash A \,\&\, \varphi(x) \in M \backslash A \varphi(x) \neq x\}$ სასრულია.

3. $\varphi(M \backslash A) \subseteq^* M \setminus A$.

ლემა 2.8. $B \notin \Pi^0_1$ ან $C \notin \Pi^0_1$

დამტკიცება. დავუშვათ საწინააღმდეგო, ვთქვათ $B \in \Pi^0_1$ და $C \in \Pi^0_1$, მაშინ $B \oplus C \in \Pi^0_1$ და თეორემის პირობებით გვაქვს, რომ

$$B \leq_{Q_1} M \backslash A \leq_{Q_1} B \oplus C$$

ე.ი $M \backslash A \equiv_Q B \oplus C \Rightarrow M \backslash A \in \Pi^0_1$ (თეორემა 1.21). მაგრამ გვექნება, რომ

$$\overline{M \backslash A} \subseteq^* \overline{M} \Rightarrow \overline{M \backslash A} \subseteq^* M \backslash A$$

რაც შეუძლებელია, მივიღეთ წინააღმდეგობა. $\square$

ზოგადობის შეუზღუდავად, დავუშვათ, რომ $B \notin \Pi^0_1$.

ლემა 2.9. $\overline{M} \subseteq^* \bigcup\limits_{x \in \overline{B}} W_{g(x)}$

დამტკიცება. დავუშვათ, რომ

$$R = \overline{M} \cap \left(\bigcup_{x \in \overline{B}} W_{g(x)} \right)$$

თუ R სასრულია, მაშინ

$$x \in \overline{B} \iff W_{g(x)} \cap (A \cup R) \neq \emptyset$$

ე.ი $\overline{B}$ არის რ.გ. და $B \in \Pi_1^0$ რაც შეუძლებელია დაშვების ძალით. ე.ი ვაჩვენეთ, რომ R არის უსასრულო. მარტივი შესამჩნევია, რომ

$$R = \overline{M} \cap \left(\bigcup_{x \in \overline{B}} W_{g(x)} \right) = \overline{M} \cap \left(\bigcup_{x \in \omega} W_{g(x)} \right)$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ, თუ $\overline{M} \not\subseteq^* \bigcup\limits_{x \in \overline{B}} W_{g(x)}$

მაშინ რ.გ. სიმრავლე $\left(\bigcup\limits_{x \in \omega} W_{g(x)} \right)$ გახლეჩს $\overline{M}$-ს ორ უსასრულო ნაწილად. მივიღეთ წინააღმდეგობა. □

განსაზღვრება 2.10.

$$D = \{y : y \in \overline{B} \,\&\, W_{g(y)} \cap \overline{M} \neq \emptyset \,\&\, W_{g(y)} \cap A = \emptyset\}$$

ლემა 2.11. D სიმრავლე არის უსასრულო.

დამტკიცება. დავუშვათ D სასრულია, მაშინ თითქმის ყველა y-ისთვის, გვექნება:

$$y \in \overline{B} \iff W_{g(y)} \cap A \neq \emptyset$$

ე.ი $\overline{B}$ არის რ.გ. და $B \in \Pi_1^0$ რაც შეუძლებელია. მაშასადამე D არის უსასრულო სიმრავლე. □

ვინაიდან D უსასრულოა, მაშინ

$$G = \left(\bigcup_{y \in D} W_{g(y)} \right) \cap \overline{M}$$

უსასრულოა, და ასევე,

$$\left(\bigcup_{y \in G} W_{f(y)} \right) \cap \overline{B \oplus C}$$

უსასრულოა და ყოველი x, y-ისთვის,

$$x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$$

საიდანაც გვექნება, რომ

I. $\{x : x \in G \,\&\, (\exists z)(\exists k)(z \in W_{f(x)} \cap B \oplus C \,\&\, z = 2k)\}$ უსასრულოა, ან

II. $\{x : x \in G \,\&\, (\exists z)(\exists k)(z \in W_{f(x)} \cap B \oplus C \,\&\, z = 2k+1)\}$ უსასრულოა.

დავუშვათ, რომ (I) სრულდება ((II) არის ანალოგიური) და განვსაზღვროთ ნაწილობრივად რეკურსიული ფუნქცია φ შემდეგნაირად, გამოვთვალოთ $\{W_{g(i)}\}_{i\in\omega}$ და $\{W_{f(j)}\}_{j\in\omega}$ ერთდროულად, და მოცემული z-ისთვის ვეძებოთ უმცირესი x, y (თუ ასეთი არსებობს), რომ

$$z \in W_{g(y)} \,\&\, u \in W_{f(x)} \,\&\, u = 2y$$

თუ ასეთი x, y ვიპოვეთ, მაშინ განვსაზღვროთ $\varphi(z) = x$.

ლემა 2.12. $\varphi(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა.

დამტკიცება. დაშვების თანახმად (I) ჭეშმარიტია და ყოველი x, y-ისთვის:

$$x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$$

ასევე G განსაზღვრებიდან გვაქვს, რომ

$$\left(\bigcup_{i\in A} W_{f(i)}\right) \cap \left(\bigcup_{j\in G} W_{f(j)}\right) = \emptyset$$

მაშასადამე, ლემა 2.11-ის თანახმად, უსასრულოდ ბევრი $z \in \overline{M}$-ისთვის, არსებობს $y \in \overline{B}$ და $x \in \overline{M}$ ისეთი, რომ

$$z \in W_{g(y)} \,\&\, 2y \in W_{f(x)} \,\&\, W_{g(y)} \in A = \emptyset$$

მაშასადამე, φ-ის განსაზღვრებით გვექნება, რომ $\varphi(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა. □

ლემა 2.13. $\overline{M} \subseteq^* \mathrm{dom}\varphi$

დამტკიცება. ლემა 2.12 -ის თანახმად $\varphi(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა. მაშასადამე, dom$\varphi \cap \overline{M}$ უსასრულოა და ვინაიდან domφ რეკურსიულად გადათვლადია და $\overline{M}$ კოჰესიურია, მაშინ $\overline{M} \subseteq^*$ domφ. □

შედეგი 2.14. $M \backslash A \subseteq^* \mathrm{dom}\varphi$

ჩვენ განვსაზღვრავთ ნაწილობრივად რეკურსიულ ფუნქციას $\widetilde{\varphi}$ პროცედურულად. გამოვთვალოთ A, $\varphi(z)$ და გავაჩეროთ პროცესი მყისიერად შემდეგ შემთხვევებში:

(I) თუ z გამოჩნდება A-ს გადათვლაში, მაშინ შევაჩეროთ პროცედურა და განვსაზღვროთ $\widetilde{\varphi}(z) = b$, სადაც b არის $\overline{B}$-ს რომელიმე ფიქსირებული ელემენტი

(II) თუ $\varphi(z)$ გამოთვლა შეწყდება, მაშინ განვსაზღვროთ $\widetilde{\varphi}(z) = \varphi(z)$

ლემა 2.13-ის და შედეგი 2.14-ის თანახმად $\widetilde{\varphi}$ განსაზღვრულია თითქმის ყველა $z \in \omega$ და ლემა 2.12-ის თანახმად $\widetilde{\varphi}(\overline{M}) \cap \overline{M}$ უსასრულოა. მაშინ შედეგი 2.7-იდან,

$$\{x : x \in \overline{M} \,\&\, \widetilde{\varphi}(x) \in \overline{M} \,\&\, \widetilde{\varphi}(x) \neq x\}$$

სასრულია. და

$$\{x : x \in \overline{M} \backslash A \,\&\, \widetilde{\varphi}(x) \in \overline{M} \backslash A \,\&\, \widetilde{\varphi}(x) \neq x\}$$

სასრულია. მაშასადამე, თითქმის ყველა $x \in \overline{A}$-სთვის $\widetilde{\varphi}(x)$ განსაზღვრულია და ლემა 2.5-ით ტოლია x-ის. ვინაიდან $\varphi(\overline{M}) \subseteq^* \overline{M}$ და $\varphi(M \backslash A) \subseteq^* M \backslash A$, და $\widetilde{\varphi}$ განსაზღვრების თანახმად, არსებობს უნიკალური y ისეთი, რომ

$$x \in W_{g(y)} \,\&\, u = 2y \,\&\, u \in W_{f(x)}$$

მაშინ თითქმის ყველა x-ისთვის გვექნება, რომ

$$x \in \overline{M} \Rightarrow x \in W_{g(y)} \,\&\, u = 2y \,\&\, u \in W_{f(x)} \Rightarrow y \in \overline{B}$$

$$x \in M \backslash A \Rightarrow x \in W_{g(y)} \,\&\, u = 2y \,\&\, u \in W_{f(x)} \Rightarrow y \in B$$

განვსაზღვროთ,

$$E = (M \backslash A) \backslash \{x : (\exists y)(\exists u)(u \in W_{f(x)} \,\&\, u = 2y \,\&\, x \in W_{g(y)})\}$$

$$F = \overline{M} \backslash \{x : (\exists y)(\exists u)(u \in W_{f(x)} \,\&\, u = 2y \,\&\, x \in W_{g(y)})\}$$

E, F სასრული სიმრავლეებია.

ჩვენ განვსაზღვრავთ რეკურსიულ ფუნქცია h, რომელიც m-დაიყვანს $M \backslash A$-ს B-ზე შემდეგნაირად. დავუშვათ h უკვე განსაზღვრულია ყველა $n < x$-ისთვის და $n \in M \backslash A \iff h(n) \in B$. გადავთვალოთ $A \cup F, E, \{W_{f(j)}\}_{j \in \omega}, \{W_{g(i)}\}_{i \in \omega}$ ერთდროულად და შევწყვიტოთ პროცესი მყისიერად, როდესაც დაფიქსირდება შემდეგი შემთხვევები.

1 თუ x გამოჩნდება $A \cup F$-ის გადათვლაში. გავაჩეროთ პროცედურა და განვსაზღვროთ $h(x) = \overline{b}$, სადაც $\overline{b}$ არის $\overline{B}$-იდან ფიქსირებული ელემენტი.

2 $x \in W_{g(y)} \,\&\, u = 2y \,\&\, u \in W_{f(x)}$, მაშინ $h(x) = y$.

3 თუ $x \in E$, მაშინ $h(x) = b$, სადაც b არის B-იდან ფიქსირებული ელემენტი.

ვინაიდან

$$\omega = A \cup E \cup F \cup \{x : (\exists y)(\exists u)(x \in W_{g(y)} \,\&\, u = 2y \,\&\, u \in W_{f(x)})\}$$

მოყვანილი პროცედურა ფარავს ყველა შესაძლო შემთხვევას, საიდანაც გვაქვს, რომ

$$M \backslash A \leq_m B$$

h ფუნქციით. შემთხვევა, როცა (II) სრულდება ანალოგიურია. □

შედეგი 2.15. (ომანაძე და ჩიტაია) [12] M მაქსიმალურია, A მთავარი ქვესიმრავლეა M-ის, B ნებისმიერი სიმრავლეა და $M \backslash A \equiv_{Q_1} B$, მაშინ $M \backslash A \leq_m B$

დამტკიცება. თუ $M \backslash A \equiv_{Q_1} B$, მაშინ გვაქვს, რომ

$$B \leq_{Q_1} M \backslash A \leq_{Q_1} B \leq_{Q_1} B \oplus B$$

მაშასადამე თეორემა 2.4-ის თანახმად $M \backslash A \leq_m B$. □

3 $Q_{1,N}$−ხარისხში შემავალი 1−ხარისხები

განსაზღვრება 3.1. A არის $Q_{1,N}$-დაყვანადი B-ზე ($A \leq_{Q_{1,N}} B$) თუ არსებობს ისეთი რეკურსიული f ფუნქცია, რომ ყოველი x, y-ისთვის:

(1) $x \in A \Leftrightarrow W_{f(x)} \subseteq B$

(2) $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$

(3) $\bigcup\limits_{x \in N} W_{f(x)} = N$

აშკარაა, რომ $\leq_{Q_{1,N}}$ რეფლექსურია, ვაჩვენოთ, რომ ის ტრანზიტულია.
ვთქვათ $f : A \leq_{Q_{1,N}} B$ და $g : B \leq_{Q_{1,N}} C$ და განვსაზღვროთ h ფუნქცია შემდეგნაირად

$$W_h(x) = \bigcup_{y \in W_{f(x)}} W_{g(y)}$$

წინადადება 3.2.

(1) $\leq_{Q_{1,N}}$- რეფლექსურია

(2) $\leq_{Q_{1,N}}$- ტრანზიტულია

დამტკიცება. რეფლექსურობა ტრივიალურია, ვაჩვენოთ ტრანზიტულობა

(1) $x \in A \Longleftrightarrow W_{h(x)} \subseteq C$
თუ $x \in A$ მაშინ $W_{f(x)} \subseteq B$ და ვინაიდან, ყოველი $y \in W_{f(x)}$ გვაქვს, რომ $W_{g(y)} \subseteq C$ მაშინ გვექნება, რომ $\bigcup\limits_{y \in W_{f(x)}} W_{g(y)} \subseteq C$, ე.ი $W_{h(x)} \subseteq C$

თუ $x \notin A$ მაშინ $W_{f(x)} \cap \overline{B} \neq \emptyset$, მაშასადამე იარსებებს $y \in W_{f(x)}$ და $y \in \overline{B}$ და განსაზღვრების თანახმად $W_{g(y)} \nsubseteq C$ საიდანაც გვექნება, რომ

$$\bigcup_{y \in W_{f(x)}} W_{g(y)} \nsubseteq C$$

ე.ი. $W_{h(x)} \nsubseteq C$

(2) $x \neq y \Rightarrow W_{h(x)} \cap W_{h(y)} = \emptyset$
ვინაიდან $x \neq y$ მაშინ $W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$ მაშასადამე

$$\left(\bigcup_{y \in W_{f(x)}} W_{g(y)} \right) \bigcap \left(\bigcup_{z \in W_{f(y)}} W_{g(z)} \right) = \emptyset$$

ე.ი $W_{h(x)} \cap W_{h(y)} = \emptyset$

(3)

$$\bigcup_{x\in N} W_{h(x)} = N$$

$$\bigcup_{x\in N} W_{h(x)} = \bigcup_{x\in N}\left(\bigcup_{y\in W_{f(x)}} W_{g(y)}\right) = \bigcup_{y\in N} W_{g(y)} = N$$

□

განსაზღვრება 3.3. M სიმრავლეს ეწოდება r-**მაქსიმალური**, თუ $\overline{M}$ r-**კოჰესიურია**

განსაზღვრება 3.4. A სიმრავლე r-**კოჰესიურია**, თუ არ არსებობს რეკურსიული W სიმრავლე, ისეთი, რომ

$$|W\cap A| = \left|\overline{W}\cap A\right| = \infty$$

თეორემა 3.5. თუ M r-მაქსიმალური სიმრავლეა, A მისი მთავარი ქვესიმრავლე და B, C ნებისმიერი სიმრავლეებია და

$$B\le_{Q_{1,N}} M\backslash A,\ \ C\le_{Q_{1,N}} M\backslash A,\ \ M\backslash A\le_{Q_{1,N}} B\oplus C$$

მაშინ $M\backslash A\le_m B$ ან $M\backslash A\le_m C$

თეორემა 3.6. ვთქვათ A მაქსიმალურია და B არის r-მაქსიმალური სიმრავლე. მაშინ

$$A\le_{Q_{1,N}} B\le_Q A\Rightarrow A\equiv_m B.$$

დამტკიცება. დავუშვათ თეორემის პირობები დაკმაყოფილებულია, მაშინ თეორემა 1 [3]-ის თანახმად $A\le_m B$. აღსანიშნავია, რომ ამ თეორემის დამტკიცება შესაძლებელია თეორემა 1 -ის გარეშეც. ვინაიდან, თუ ვაჩვენებთ, რომ $B\le_m A$ მაშინ იუნგის თეორემის თანახმად $B\equiv_m A$, მაშასადამე, რომ დავამტკიცოთ თეორემა 3.6 საჭიროა, რომ ვაჩვენოთ $B\le_m A$

ვთქვათ $f: A\le_{Q_{1,N}} B$ და $g: B\le_{Q_{1,N}} A$.ვინაიდან A და B რეკურსიულად გადათვლადია, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ

$$(\exists f_1 \text{ ზოგად რეკურსიული ფუნქცია })(\forall x)\left(W_{f_1(x)} = B\cup W_{f(x)}\right),$$

$$(\exists g_1 \text{ ზოგად რეკურსიული ფუნქცია })(\forall x)\big(\big(x\in B \iff W_{g_1(x)}\subseteq A)\big)$$

$$\&\left(x\in\overline{B}\Rightarrow |W_{g_1(x)}\cap\overline{A}|<\infty\right)\&\ A\subseteq W_{g_1(x)}\big).$$

საიდანაც მივიღებთ, რომ

$$\bigcup_{x\in\omega} W_{f_1(x)} =^* \omega \quad \text{და} \quad \bigcup_{x\in\omega} W_{g_1(x)} =^* \omega.$$

განვსაზღვროთ ნაწილობრივი რეკურსიული ფუნქცია φ შემდეგნაირად: გადავთვალოთ ერთდროულად $\{W_{f(i)}\}_{i\in\omega}$, $\{W_{g_1(j)}\}_{j\in\omega}$ და ყოველი z-ისთვის, მოვძებნოთ (თუ ასეთი არსებობს) უმცირესი x, y ისეთი, რომ

$$z \in W_{f(y)} \,\&\, y \in W_{g_1(x)}.$$

თუ ასეთი x და y აღმოვაჩინეთ, მაშინ გავუტოლოთ $\varphi(z) = x$. აშკარაა, რომ თუ $z \in B$ და $\varphi(z)$ განსაზღვრულია, მაშინ $\varphi(z) \in B$.

ლემა 3.7. $|\varphi(\overline{B})| = \infty$.

დამტკიცება. ვინაიდან $\bigcup\limits_{i\in\omega} W_{g(i)}$ რეკურსიულია და ასევე გვაქვს პირობა:

$$(\forall x)(\forall y)(x \neq y \Rightarrow W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset)$$

ჭეშმარიტია, რომ $(\forall i)(W_{g(i)}$ რეკურსიულია).

ვაჩვენოთ, რომ $(\forall x)(|W_{g(x)} \cap \overline{B}| < \infty)$, და მაშასადამე,

$$(\forall x)\left(|W_{g_1(x)} \cap \overline{B}| < \infty\right). \tag{1}$$

დავუშვათ საწინააღმდეგო

$$(\exists x_1)\left(|W_{g_1(x)} \cap \overline{B}| = \infty\right). \tag{2}$$

მაშინ $\overline{A}$-ის არარეკურსიულობით

$$\left|B \setminus (W_{g_1(x)} \cap \overline{A})\right| = \infty. \tag{3}$$

ე.ი. (2) და (3)-დან ვიღებთ წინააღმდეგობას, ვინაიდან B r-მაქსიმალურია და სიმრავლე $W_{g_1(x)}$ რეკურსიულია.

პირობა (1) ჭეშმარიტია, და ფუნქცია φ-ის განსაზღვრებიდან მარტივი დასანახია, რომ $|\varphi(B)| = \infty$. □

ე.ი. φ განსაზღვრულია ყველა ნატურალურ რიცხვზე, $\varphi(\overline{B}) \subseteq \overline{B}$ და $|\varphi(\overline{B})| = \infty$. შედეგი 2.7-იდან გვექნება, რომ

$$\left|\{x : x \in \overline{B} \,\&\, \varphi(x) \text{ განსაზღვრულია } \&\, \varphi(x) \neq x\}\right| < \infty.$$

მაშასადამე, ყოველი x-ისთვის გვექნება, რომ

$$x \in \overline{B} \Rightarrow \left|\left\{y : y \in W_{f_1(x)} \,\&\, x \in W_{g_1(y)}\right\}\right| = 1.$$

მაშასადამე, თითქმის ყოველი x-სთვის

$$x \in \overline{B} \Rightarrow x \in W_{g_1(y)} \,\&\, y \in W_{f_1(x)} \Rightarrow y \in \overline{A},$$

$$x \in B \Rightarrow x \in W_{g_1(y)} \,\&\, y \in W_{f_1(x)} \Rightarrow y \in A.$$

ყოველი x-ისთვის $\tilde{f}(x)$ იყოს პირველი ელემენტი $\{y : y \in W_{f_1(x)} \,\&\, x \in W_{g_1(y)}\}$-ის გადათვლაში. ხოლო, $\tilde{f}$-ის დახმარებით შესაძლებელია კონსტრუქტირება ზოგად რეკურსიული ფუნქციის, რომელიც სიმრავლე B-ს m-დაიყვანს A-ზე. □

თეორემა 3.8. თუ M_1 და M_2 r-მაქსიმალური სიმრავლეა და M_1^0, M_1^1 და M_2^0, M_2^1 არატრივიალური დაყოფაა M_1-ისა და M_2-ის. მაშინ

$$M_1^0 \equiv_{Q_{1,N}} M_2^0 \iff M_1^0 \equiv_1 M_2^0.$$

დამტკიცება. თეორემის პირობების თანახმად დავუშვათ, რომ M_1 და M_2 r-მაქსიმალური სიმრავლეა, M_1^0, M_1^1 და M_2^0, M_2^1 არატრივიალური დაყოფაა M_1-ის და M_2-ის, და $M_1^0 \leq_{Q_{1,N}} M_2^0$ რეკურსიული f ფუნქციით, $M_2^0 \leq_{Q_{1,N}} M_1^0$ რეკურსიული g ფუნქციით. განვსაზღვროთ

$$P_1 = \bigcup_{y \in M_1^1} W_{f(x)} \quad \text{და} \quad P_2 = \bigcup_{y \in M_2^1} W_{g(y)}.$$

ლემა 3.9. სიმრავლეები

1. $\left(\bigcup_{x \in \overline{M_2} \setminus P_1} W_{g(x)} \right) \cap \overline{M_1},$
2. $\left(\bigcup_{x \in \overline{M_1} \setminus P_2} W_{f(x)} \right) \cap \overline{M_2},$

უსასრულოა.

დამტკიცება. (1) ვთქვათ $R = \left(\bigcup_{x \in \overline{M_2} \setminus P_1} W_{g(x)} \right) \cap \overline{M_1}$ სასრული სიმრავლეა. განვიხილოთ რ.გ. სიმრავლე

$$A = \{y : y \in P_1 \cup M_2^1 \text{ და } W_{g(y)} \cap M_1^1 \neq \emptyset\}.$$

მაშასადამე,

$$x \in (\overline{M_2} \setminus P_1) \cup A \iff W_{g(x)} \cap (M_1^1 \cup R) \neq \emptyset,$$

ე.ი. $(\overline{M_2} \setminus P_1) \cup A$ რ.გ, და აქედან გამომდინარეობს, რომ $(\overline{M_2} \setminus P_1) \cup A \cup M_2^1$ რ.გ სიმრავლეა. თუ $P_1 \cap M_2$ სასრულია, მაშინ

$$M_2^1 \cup \overline{M_2} =^* (\overline{M_2} \setminus P_1) \cup A \cup M_2^1,$$

ე.ი $M_2^1 \cup \overline{M_2}$ რ.გ. სიმრავლეა, რაც შეუძლებელია მივიღეთ წინააღმდეგობა

თუ $P_1 \cap \overline{M_2}$ უსასრულოა, მაშინ $(P_1 \cap \overline{M_2}) \setminus A$ სიმრავლეც უსასრულოა. ვინაიდან, თუ $B = (P_1 \cap \overline{M_2}) \setminus A$ სასრულია, მაშინ

$$(\overline{M_2} \setminus P_1) \cup B \cup A \cup M_2^1 = \overline{M_2} \cup M_2^1$$

და, ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $\overline{M_2} \cup M_2^1$ რ.გ. სიმრავლეა, რაც შეუძლებელია. მაშასადამე, თუ $\overline{M_2} \cap P_1$ უსასრულოა და R სასრულია, მაშინ $(\overline{M_2} \cap P_1) \setminus A$ უსასრულო სიმრავლეა.

განვსაზღვროთ $L_1 = (\overline{M_2} \setminus P_1) \cup A \cup \overline{M_2}$ და $L_2 = P_1 \cup \overline{M_2}$. რ.გ. სიმრავლეების რედუქციის პრინციპის თანახმად L_1 და L_2 სიმრავლეებისთვის იარსებეს რ.გ. სიმრავლე $L_1^1 \subseteq L_1$ და $L_1^2 \subseteq L_2$ ისეთი, რომ $L_1^1 \cap L_1^2 = \emptyset$, $L_1^1 \cup L_1^2 = L_1 \cup L_2$. აშკარაა, რომ $L_1^1 \cup L_1^2 = \omega$.

სიმრავლე $R_1 = \overline{M_2} \cap \left(\bigcup_{x \in \overline{M_1}} W_{f(x)} \right)$ უსასრულოა. ვინაიდან, თუ R_1 სასრულია, მაშინ

$$x \in M_1^1 \cup \overline{M_1} \iff W_{f(x)} \cap (M_1^1 \cup P_1 \cup R_1) \neq \emptyset,$$

ე.ი $M_1^1 \cup \overline{M_1}$ რ.გ. სიმრავლეა, რაც შეუძლებელია. აქედან გამომდინარეობს, რომ $\overline{M_2} \setminus P_1$ უსასრულოა. $\overline{M_2} \setminus P_1 \subseteq L_1$ და $(\overline{M_2} \cap P_1) \setminus A \subseteq L_2$. მაშასადამე, რეკურსიული სიმრავლე L_1^1 და L_1^2 გაყოფს $\overline{M_2}$ ორ უსასრულო ნაწილად, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

მივიღეთ, რომ R უსასრულო სიმრავლეა.

(2) მტკიცდება ანალოგიურად.

$\square$

შედეგი 3.10.

$$\overline{M_1} \subseteq^* \bigcup_{x \in M_2^1 \cup \overline{M_2}} W_{g(x)} \quad \text{და} \quad \overline{M_2} \subseteq^* \bigcup_{x \in M_1^1 \cup \overline{M_1}} W_{f(x)}.$$

განვსაზღვროთ ნაწილობრივად რეკურსიული φ ფუნქცია შემდეგნაირად. ერთდროულად გადავთვალოთ $M_1^0, M_1^1 \cup \left(\bigcup_{y \in M_2^1} W_{g(y)} \right), \{W_{f(i)}\}_{i \in \omega}, \{W_{g(j)}\}_{j \in \omega}$ და ყოველი z-ისთვის შევაჩეროთ პროცედურა, თუ ჩამონათვალიდან ერთ-ერთი მაინც შესრულდება:

(1) $z \in W_{g(y)}$ & $y \in W_{f(x)}$. შევწყვიტოთ პროცედურა და განვსაზღვროთ $\varphi(z) = x$.

(2) z გამოჩნდება M_1^0-ის გადათვლაში. შევწყვიტოთ პროცედურა, განვსაზღვროთ $\varphi(z) = m_1$, სადაც m_1 არის M_1^0-ის რაიმე ფიქსირებული ელემენტი.

(3) z გამოჩნდება $M_1^1 \cup \left(\bigcup_{y \in M_2^1} W_{g(y)} \right)$ -ის გადათვლაში. შევწყვიტოთ პროცედურა, განვსაზღვროთ $\varphi(z) = m_2$, სადაც m_2 არის M_1^1-ის ფიქსირებული ელემენტი.

ლემა 3.11. ყოველი $x \in \omega$, $W_{f(x)} \cap \overline{M_2}$ და $W_{g(x)} \cap \overline{M_1}$ სასრული სიმრავლეებია.

დამტკიცება. ყოველი x და y-ისთვის

$$x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset \tag{1}$$

$$\bigcup_{x \in \omega} W_{f(x)} = \omega \tag{2}$$

მაშასადამე,

$$W_{f(x)} \cap \left(\bigcup_{y \in \omega, y \neq x} W_{f(x)} \right) = \emptyset$$

და ვინაიდან $W_{f(x)}$ და $\bigcup\limits_{y \in \omega, y \neq x} W_{f(x)}$ რ.გ. სიმრავლეებია, გვექნება, რომ $W_{f(x)}$ რეკურსიულია ყოველი x-ისათვის. თუ ზოგიერთი $i \in \overline{M_1}$-სთვის $W_{f(i)} \cap \overline{M_2}$ უსასრულოა, მაშინ რეკურსიული სიმრავლე $W_{f(i)}$ გახლეჩს $\overline{M_2}$ ორ უსასრულო ნაწილად, მივიღეთ წინააღმდეგობა. მაშასადამე, $W_{f(i)} \cap \overline{M_2}$ სასრულია ყოველი $i \in \overline{M_1}$-ისათვის.

ანალოგურად ვაჩვენებთ, რომ $W_{g(x)} \cap \overline{M_1}$ სასრულია. □

მაშასადამე, φ განსაზღვრულია თითქმის ყველგან.

ლემა 3.12. $\varphi(\overline{M_1}) \cap \overline{M_1}$ უსასრულოა.

დამტკიცება. ყოველი x, y-ისთვის გვაქვს, რომ

$$x \neq y \Rightarrow \left(W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset \;\&\; W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset \right).$$

ლემა 3.9, ლემა 3.11 და შედეგი 3.10 და φ განსაზღვრების თანახმად, $\varphi(\overline{M_1}) \cap \overline{M_1}$ უსასრულოა. □

შედეგი 2.7-ის თანახმად,

$$\{x : x \in \overline{M_1} \;\&\; \varphi(x) \neq x\}$$

სასრულია, და თითქმის ყოველი $x \in \overline{M_1}$-ისთვის, თუ $\varphi(x)$ განსაზღვრულია, მაშინ $\varphi(x) \in \overline{M_1}$. მაშასადამე, თითქმის ყოველი $x \in \overline{M_1}$-ისთვის, $\varphi(x)$ განსაზღვრულია და ტოლია x-ის, და, მაშასადამე, არსებობს (უნიკალური) y, ისეთი, რომ

$$x \in W_{g(y)} \;\&\; y \in W_{f(x)}.$$

ე.ი. თითქმის ყველა x-ისთვის

$$x \in \overline{M_1} \Rightarrow x \in W_{g(y)} \;\&\; y \in W_{f(x)} \Rightarrow y \in \overline{M_2} \cup M_2^1.$$

განვსაზღვროთ სიმრავლე

$$F = \overline{M_1} \setminus \left\{x : (\exists y) \left(y \in W_{f(x)} \;\&\; x \in W_{g(y)}\right)\right\}.$$

F სასრულია.

ჩვენ განვსაზღვრავთ რეკურსიულ h ფუნქციას, რომელიც სიმრავლეს M_1^0 1-დაიყვანს M_2^0-ზე შემდეგნაირად. დავუშვათ h უკვე განსაზღვრულია $n < x$, თუ $n_1 \neq n_2$,

მაშინ $h(n_1) \neq h(n_2)$ და $n \in M_1^0 \iff h(n) \in M_2^0$. ვთქვათ R და R_1 რეკურსიული ქვესიმრავლეა M_2^0-ის და M_1^1-ის გადავთვალოთ $M_2^0, M_1^1 \cup F, \{W_{f(j)}\}_{j\in\omega}, \{W_{g(i)}\}_{i\in\omega}$ სიმრავლეები და გავჩერდეთ თუ შესრულდება შემდეგი ჩამონათვალიდან ერთ-ერთი მაინც

(1) x გამოჩნდება M_1^0-ის გადათვლაში. მაშინ შევაჩეროთ პროცედურა და განვსაზღვროთ

$$h(x) = \min\{k : k \in R \ \& \ k \notin \{h(0), \ldots, h(x-1)\}\}.$$

(2) x გამოჩნდება $M_1^1 \cup F$-ის გადათვლაში. მაშინ შევაჩეროთ პროცედურა და განვსაზღვროთ

$$h(x) = \min\{n : n \in R_1 \ \& \ n \notin \{h(0), \ldots, h(x-1)\}\}.$$

(3) $x \in W_{g(y)} \ \& \ y \in W_{f(x)}$. თუ $y \notin \{h(0), \ldots, h(x-1)\}$, გავაჩეროთ პროცედურა და განვსაზღვროთ $h(x) = y$.

თუ $y \in \{h(0), \ldots, h(x-1)\}$, მაშინ $y \notin \overline{M_2}$. ვინაიდან

$$y \in \overline{M_2} \ \& \ y \in \{h(0), \ldots, h(x-1)\}.$$

და იარსებებს $i < x$, $i \in W_{g(y)} \ \& \ y \in W_{f(i)}$. მაშასადამე,

$$W_{f(i)} \cap W_{f(x)} \neq \emptyset,$$

რაც შეუძლებელია. ე.ი. $y \in M_2^0 \cup M_2^1$. გამოვთვალოთ M_2^0 და M_1^1 ერთდროულად. თუ $y \in M_2^0$, მაშინ $x \in W_{g(y)} \ \& \ y \in W_{f(x)}$ და გვექნება, რომ $x \in \overline{M_1^0}$ და

$$h(x) = \min\{n : n \in R \ \& \ n \notin \{h(0), \ldots, h(x-1)\}\}.$$

თუ $y \in M_1^1$, მაშინ

$$x \in W_{g(y)} \ \& \ y \in W_{f(x)} \Rightarrow x \in \overline{M_1^0},$$

გვექნება, რომ

$$h(x) = \min\{n : n \in R_1 \ \& \ n \notin \{h(0), \ldots, h(x-1)\}\}.$$

აშკარაა, რომ

$$\omega = M_1^0 \cup M_1^1 \cup F \cup \left\{x : (\exists y)\left(y \in W_{f(x)} \ \& \ x \in W_{g(y)}\right)\right\}.$$

მაშასადამე, სამივე განხილული შემთხვევა მოიცავს ნატურალურ რიცხვთა სიმრავლეს, და გვექნება, რომ $M_1^0 \leq_1 M_2^0$ რეკურსიული h ფუნქციით.

მაშასადამე, $M_1^0 \leq_1 M_2^0$. შემთხვევა $M_2^0 \leq_1 M_1^0$ ანალოგიურია. $\square$

განსაზღვრება 3.13. ([13]) სიმრავლე A არის ჰემი r-მაქსიმალური, თუ არსებობს r-მაქსიმალური სიმრავლე M და მისი არატრივიალური დაყოფა M_0, M_1 ისეთი, რომ $A = M_0$.

განსაზღვრება 3.14. ([14]) რ.გ. სიმრავლე A არის არსად მარტივი, თუ ყოველი რ.გ. სიმრავლე B ისეთი, რომ $B \setminus A$ უსასრულოა, არსებობს უსასრულო რ.გ. სიმრავლე $W \subseteq B \setminus A$.

განსაზღვრება 3.15. ([15]) A სიმრავლის არატრივიალური დაყოფას A_0, A_1 ეწოდება ფრიდბერგის დაყოფა, თუ ყოველი რ.გ. W-ისთვის $W \setminus A$ და $W \setminus A_0, W \setminus A_1$ არაა რ.გ.

ცნობილია (იხ. [[15], თეორემა 1.5]), რომ A სიმრავლის ფრიდებრგის დაყოფა A_0, A_1 არსად მარტივია.

წინადადება 3.16. ვთქვათ A არის ჰემი r-მაქსიმალური არსად მარტივი სიმრავლე, და B არარეკურსიული რ.გ. სიმრავლე ისეთი, რომ $B \leq_{Q_{1,N}} A$. მაშინ B არის ჰემი r-მაქსიმალური არსად მარტივი სიმრავლე.

დამტკიცება. ვთქვათ A არის r-მაქსიმალური სიმრავლე , B არარეკურსიული რ.გ. სიმრავლე ისეთი, რომ $B \leq_{Q_{1,N}} A$ რეკურსიული f ფუნქციით. დავუშვათ, რომ M არის r-მაქსიმალური სიმრავლე და C არარეკურსიული რ.გ სიმრავლე ისეთი, რომ $A \cap C = \emptyset$ და $M = A \cup C$. განვიხილოთ სიმრავლე

$$B_1 = \left\{x : W_{f(x)} \cap C \neq \emptyset\right\}.$$

მაშინ B რ.გ. სიმრავლეა და $B_1 \cap B = \emptyset$.

ვაჩვენოთ, რომ B_1 არაა რეკურსიული. დავუშვათ საწინააღმდეგო. მაშინ B_1 რეკურსიულია და $\overline{B_1} \setminus B$ უსასრულოა. თუ $\overline{B_1} \setminus B$ სასრულია, მაშინ B უნდა იყოს რეკურსიული, მივიღეთ წინააღმდეგობა. ვინაიდან A არსად მარტივია და $B \leq_{Q_{1,N}} A$, გვექნება, რომ B არსად მარტივია (იხ. [16]). მაშასადამე, არსებობს უსასრულო რ.გ. სიმრავლე $W \subseteq \overline{B_1} \setminus B$. ზოგადობის შეუზღუდავად დავუშვათ, რომ W რეკურსიულია. W_1 და W_2 იყოს უსასრულო რეკურსიული სიმრავლეები და $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, $W = W_1 \cup W_2$. მაშინ

$$R_1 = \bigcup_{x \in W_1} W_{f(x)} \quad \text{და} \quad R_2 = \bigcup_{x \in W_2} W_{f(x)}$$

რეკურსიული სიმრავლეა, ვინაიდან

$$\bigcup_{x \in \omega} W_{f(x)} = R_1 \cup R_2 \cup \left(\bigcup_{x \in \overline{W}} W_{f(x)}\right)$$

და $R_1, R_2, \bigcup\limits_{x \in W} W_{f(x)}$ არის წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი. მაშასადამე, $R_1 \cap \overline{M}$ და $R_2 \cap \overline{M}$ უსასრულოა. მაგრამ M არის r-მაქსიმალური, მივიღეთ წინააღმდეგობა.

მაშასადამე, B_1 არარეკურსიული რ.გ. სიმრავლეა, $B \cap B_1 = \emptyset$ და $B \cup B_1$ უსასრულოა. თუ $B \cup B_1$ არაა r-მაქსიმალური სიმრავლე, მაშინ იარსებებს რეკურსიული სიმრავლე R, ისეთი,

რომ $R\cap(\overline{B}\cup B_1)$ და $R\cap(\overline{B}\cup B_1)$ უსასრულოა. მაშინ $\bigcup\limits_{x\in R} W_{f(x)}\cap\overline{M}$ უსასრულოა და $\bigcup\limits_{x\in R} W_{f(x)}\cap$ $\overline{M}$ რეკურსიულია, რაც ეწინააღმდეგება M-ის r-მაქსიმალურობას. $\square$

თეორემა 3.8-ის და წინადადება 3.16-იდან გამომდინარეობს შემდეგი

თეორემა 3.17. ვთქვათ r-მაქსიმალური სიმრავლის ფრიდბერგის დაყოფაა A, B, და $a = \mathrm{deg}_{Q_{1,N}}(A)$ და $b = \mathrm{deg}_{Q_{1,N}}(B)$. მაშინ ყოველი რ.გ. სიმრავლე $, D \in a(C, D \in b)$-ისთვის გვექნება, რომ $C \equiv_1 D$.

შემდეგი თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ ჰემი r-მაქსიმალური სიმრავლის Q- ხარისხი შეიცავს უსასრულო წყვილ-წყვილად თანაუკვეთ არარეკურსიულ m-ხარისხებს.

თეორემა 3.18. r-მაქსიმალურის Q-ხარისხი შეიცავს m-ხარისხების უსასრულო ანტიჯაჭვს.

დამტკიცება. დამტკიცებულია, რომ რ.გ. სიმრავლე M არის r-მაქსიმალური მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ M მარტივი და ყველა არატრივიალური დაყოფის წყვილი არაა რეკურსიულად განცალებადი. (იხ. [17])

ვთქვათ $A^\omega = \{x : D_x \subseteq A\}, {}^\omega A = \{x : D_x \cap A \neq \emptyset\}$ და $A^n = \{\langle x_1, \dots, x_n\rangle : x_i \in A, i = 1, \dots, n\}$.

დამტკიცებულია, რომ თუ A, B არის რეკურსიულად განუცალებადი წყვილი და $A \cup B$ მარტივია, მაშინ

$$(\forall C)\left(A \subseteq C \subseteq \overline{B} \Rightarrow C <_{\text{btt}} C^\omega \;\&\; C <_{\text{btt}} {}^\omega C\right).$$

(იხ. [11])

დამტკიცებულია, რომ თუ $C <_{\text{btt}} C^\omega$, მაშინ ყოველი n, $C^n <_m C^{n+1}$ (იხ., [[18], მე-4 თეორემის მტკიცება]).

ვთქვათ E არის ჰემი r-მაქსიმალური სიმრავლე. მაშინ ყოველი n, $E^n \leq_n E^{n+1}$ და $E^{n+1} \nleq_m E^n$.

დავუშვათ, რომ

$$W_{f_n(x)} = \{\pi_{n1}(x), \dots, \pi_{nn}(x)\}.$$

მაშინ ყოველი $x > 0$,

$$x \in E^n \iff W_{f_n(x)} \subseteq E,$$

ე.ი. $E^n \leq_Q E$.

$E^n <_m E^{n+1}$ და $E^n \equiv_Q E^{n+1}$. უფრო მეტიც $E \equiv_{\text{bs}Q} E^{n+1}$ (იხილეთ [19] bs$Q$-დაყვანადობის განსაზღვრება). მაშინ, თეორემა 2-ის ძალით [19]-დან, არსებობს უსასრულოდ მეტი წყვილად არა m-გამოთვლადი რ.გ. სიმრავლე $\{C_i\}_{i\in\omega}$, ისეთი, რომ

$$(\forall i)\left(E^n <_m C_i \leq_{\text{bs}Q} E^{n+1}\right).$$

$\square$

4 $Q-$ და $Q_{1,N}-$ დაყვანადობებს შორის კავშირი

თეორემა 4.1. ვთქვათ A არის Σ_2^0 სიმრავლე, B რ.გ. და $A \leq_Q B$. მაშინ, არსებობს ისეთი რ.გ. სიმრავლე C, რომ

$$A \leq_{Q_{1,N}} C \leq_Q B.$$

დამტკიცება. ვთქვათ A არის Σ_2^0 სიმრავლე, B რ.გ. და $A \leq_Q B$. ვინაიდან, $A \leq_Q B$ მაშინ $A \in \Pi_2^0$ (იხ. [9] გვ. 232). მაშასადამე $A \in \Delta_2^0$ და ([20] შედეგი 5) არსებობს ისეთი რეკურსიული f, რომ

$$(\forall x)\left(x \in A \iff W_{f(x)} \subseteq B\right) \,\&\, \left(W_{f(x)} \text{ სასრულია}\right).$$

ვთქვათ B-ს რეკურსიული აპროქსიმაცია $\{B_s\}_{s\in\omega}$ და განვსაზღვროთ მისი დახმარებით C შემდეგნაირად:

$$C = \{\langle x, t\rangle : (\exists s \geq t)\left[W_{f(x),s} \subseteq B_s\right]\}.$$

მაშინ ყოველი x-ისთვის,

$$x \in A \iff (\forall t)\left(\langle x, t\rangle \in C\right).$$

განვსაზღვროთ რეკურსიული g ფუნქცია შემდეგნაირად (შევნიშნოთ, რომ საჭიროა $W_{f(x)}$-ის სისრულე და ამავდროულად A-ს Σ_2^0-ობა)

$$W_{g(x)} = \{\langle x, t\rangle : t \in \omega\}.$$

მაშინ,

(1) $(\forall x)\left(x \in A \iff W_{g(x)} \subseteq C\right)$

(2) $x \neq y \Rightarrow W_{g(x)} \cap W_{g(y)} = \emptyset$

(3) $\bigcup\limits_{x\in\omega} W_{g(x)}$ რეკურსიულია

ე.ი, $A \leq_{Q_{1,N}} C$.

ვთქვათ h რეკურსიული ფუნქციაა და

$$W_{h(\langle x,t\rangle)} = \begin{cases} W_{f(x),n} & \text{სადაც } n = \min\{s : s \geq t \,\&\, W_{f(x),s} \subseteq B_s \,\&\, \langle x, t\rangle \in C_s\}, \\ W_{f(x)} & \text{წინააღმდეგ შემთხვევაში.} \end{cases}$$

მაშინ

$$\langle x, t\rangle \in C \iff (\exists s \geq t)\left[W_{f(x),s} \subseteq B_s\right] \Rightarrow W_{h(\langle x,t\rangle)} \subseteq B$$

და

$$\langle x, t\rangle \notin C \Rightarrow x \notin A \iff W_{f(x)} \not\subseteq B \Rightarrow W_{h(\langle x,t\rangle)} \not\subseteq B.$$

მაშასადამე, $C \leq_Q B$.

შედეგი 4.2. ვთქვათ A, B რ.გ. სიმრავლეა, $B \subset A$. მაშინ იარსებებს ისეთი რ.გ. სიმრავლე C, რომ

$$A \setminus B \leq_{Q_{1,N}} C \leq_Q A.$$

დამტკიცება. ([21], თეორემა 1) $A \setminus B \leq_Q A$. $\square$

შედეგი 4.3. ვთქვათ A, B რ.გ. სიმრავლეა და $B \subset_m A$. მაშინ იარსებებს ისეთი რ.გ სიმრავლე C, რომ

$$A \setminus B \leq_{Q_{1,N}} C \leq_Q A.$$

დამტკიცება. შედეგი 4.2-ის თანახმად, თუ A, B რ.გ. სიმრავლეა და $B \subset_m A$, მაშინ იარსებებს ისეთი რ.გ. სიმრავლე C, რომ

$$A \setminus B \leq_{Q_{1,N}} C \leq_Q A.$$

მაგრამ, თუ $B \subset_m A$, მაშინ $A \setminus B$ იმუნურია და [22] დამტკიცებულია, რომ თუ C არა რეკურსიული რ.გ. სიმრავლეა და $A \setminus B$ იმუნურია, მაშინ $C \not\leq_Q A \setminus B$. მაშასადამე

$$A \setminus B \leq_{Q_{1,N}} C \leq_Q A.$$

$\square$

რ.გ. სიმრავლე, უსასრულო დამატებით, არის **ძლიერად ჰიპერმარტივი**, თუ არ არსებობს ისეთი რეკურსიული f ფუნქცია, რომ ყოველი x და y-ისთვის,

1. $x \neq y \Rightarrow W_{f(x)} \cap W_{f(y)} = \emptyset$;
2. $W_{f(x)} \cap \overline{A} \neq \emptyset$;
3. $\bigcup\limits_{x \in \omega} W_{f(x)}$ რეკურსიულია

შენიშვნა 4.4. საზოგადოდ და თეორემა 4.1-ში მიმართება $C \leq_Q B$ ვერ შეიცვლება $C \leq_{Q_{1,N}} B$-ით. ვინაიდან, თუ A ძლიერად ჰიპერმარტივია, B და C რ.გ. არარეკურსიული სიმრავლეებია და $A = B \cup C$ და $B \cap C = \emptyset$. მაშინ ([23], წინადადება 1), $B \leq_Q A$ და $C \leq_Q A$. თეორემა 4.1-ის ძალით იარსებებს D ისეთი, რომ

$$B \leq_{Q_{1,N}} D \leq_Q A.$$

მაგრამ $D \not\leq_{Q_{1,N}} A$.

$\square$

ლიტერატურა

[1] Emil L. Post. Recursively enumerable sets of positive integers and their decision problems. Bulletin of the American Mathematical Society, 50:284–316, 1944.

[2] H. Rogers. Theory of Recursive Functions and Effective Computability. McGraw-Hill, 1967.

[3] R. Sh. Omanadze. Upper semilattice of recursively enumerable Q-degrees. Algebra and Logic, 23(2):124–130, Mar 1985. ISSN 1573-8302. English translation.

[4] R. Downey, G. LaForte, and A. Nies. Computably enumerable sets and quasi-reducibility. Annals of Pure and Applied Logic, 95(1):1–35, 1998. ISSN 0168-0072.

[5] S. S. Marchenkov. One class of partial sets. Mathematical notes of the Academy of Sciences of the USSR, 20(4):823–825, Oct 1976. ISSN 1573-8876.

[6] O. V. Belegradek. Algebraically closed groups. Algebra and Logika, 13(3):239–255, 1974. doi: 10.1007/BF01463347.

[7] M. Blum and I. Marques. On complexity properties of recursively enumerable sets. Journal of Symbolic Logic, 38(4):579–593, 1973. doi: 10.2307/2271984.

[8] John T. Gill and Paul H. Morris. On subcreative sets and s-reducibility. The Journal of Symbolic Logic, 39(4):669–677, 1974. ISSN 00224812.

[9] P. Odifreddi. Classical Recursion Theory, Studies in logic and the foundations of mathematics, volume 1. North-Holland Publishing Company, 1999.

[10] Alistair H Lachlan. On the lattice of recursively enumerable sets. Transactions of the American Mathematical Society, 130(1):1–37, 1968.

[11] G. N Kobzev. btt-reducibility. ii. Algebra and Logic, 12:433–444, 1973.

[12] R. Omanadze and I. Chitaia. r-maximal sets and $Q_{1,N}$-reducibility. Mathematical Logic Quarterly, 67, 2021.

[13] R.G Downey and Michael Stob. Automorphisms of the lattice of recursively enumerable sets: Orbits. Advances in Mathematics, 92(2):237–265, 1992. ISSN 0001-8708. doi: 10.1016/0001-8708(92)90065-S.

[14] Richard A. Shore. Nowhere simple sets and the lattice of recursively enumerable sets. Journal of Symbolic Logic, 43(2):322–330, 1978. doi: 10.2307/2272830.

[15] Rod Downey and Michael Stob. Splitting theorems in recursion theory. Annals of Pure and Applied Logic, 65(1):1–106, 1993. ISSN 0168-0072. doi: 10.1016/0168-0072(93)90234-5.

[16] R. Sh. Omanadze. Q-reducibility and nowhere simple sets. Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR, 127(1):29–32, 1987.

[17] J. P. Cleave. Some properties of recursively inseparable sets. Mathematical Logic Quarterly, 16 (2):187–200, 1970. doi: 10.1002/malq.19700160208.

[18] Carl G. Jockusch. Relationships between reducibilities. Transactions of the American Mathematical Society, 142:229–237, 1969. ISSN 00029947.

[19] R. Sh. Omanadze. On a strengthening of Q-reducibility. Algebra and Logic, 34(1):45–49, 1995. English translation.

[20] R. Sh. Omanadze and A. Sorbi. Strong enumeration reducibilities. Archive for Mathematical Logic, 45(7):869–912, 2006.

[21] M. M. Arslanov and R. Sh. Omanadze. Q-degrees of n-c.e. sets. Illinois Journal of Mathematics, 51(4):1189–1206, 2007.

[22] R. Sh. Omanadze. Nonbounding n-c.e. q-degrees. Georgian Mathematical Journal, 16(4):779–786, 2009.

[23] R. Sh. Omanadze. On the upper semilattice of recursively enumerable sQ-degrees. Algebra i Logika, 30(4):405–413, 1991. English translation: Algebra and Logic 30(4), 265–271 (1992).