ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი

მულტიპლიკაციური სისტემები ნულგანზომილებიან ლოკალურად კომპაქტურ აბელის ჯგუფებზე

ნიკა არეშიძე

მათემატიკის სამაგისტრო პროგრამა
სამაგისტო ნაშრომი შესრულებულია მათემატიკაში მეცნიერებათა მაგისტრის
აკადემიური ხარისხის მოსაპოვებლად

ხელმძღვანელები: თსუ-ს ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტის
ასოცირებული პროფესორი თენგიზ კოპალიანი,
მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი, საქართველოს უნივერსიტეტის მათემატიკის
ინსტიტუტის მეცნიერ-თანამშრომელი გიორგი ტეფნაძე.

თბილისი
2024 წელი

სარჩევი

აბსტრაქტი

საზოგადოდ ნულგანზომილებიან ლოკალურად კომპაქტურ ჯგუფზე შეიძლება განისაზღვროს სხვადასხვა ტიპის წარმოებულები. ბუცერმა და ვაგნერმა ([5]) 1973 წელს კანტორის ჯგუფზე განსაზღვრეს და შეისწავლეს $f \in L^p(G)$ ფუნქციის ძლიერი წარმოებული $D^{(r)}(f) \in L^p(G)$, $r \in \mathbb{N}$. (იხ. გან. 6.3). [5]-ში მათ აჩვენეს, რომ სამართლიანია ტოლობა $D_X^{(1)}(\psi_k) = k\psi_k$, $k \in \mathbb{N}_+$. ბუცერ-ვაგნერის წარმოებულის განსაზღვრება ვილენკინის ჯგუფებზე განაზოგადა ონევიერმა ([21]), (იხ. გან. 6.4). ზელინმა [32]-ში შემოგვთავაზა P - წარმოებულისა და ინტეგრალის განსაზღვრება, რომელიც უფრო მარტივია ვიდრე, ბუცერ-ვაგნერისა და ონევიერის განასზღვრებები. მოცემულ სამაგისტრო ნაშრომში $L^{p(\cdot)}(G_m)$ სივრცეში დამტკიცებულია $f^{[r]}$-ს არსებობის თეორემა. P - წარმოებულის ტერმინებში მიღებულია ჯექსონისა და ბერშტეინის კლასიკური უტოლობები ვილენკინის სისტემის მიმართ ცვლად მაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში. ასევე, მოცემულ ნაშრომში დამტკიცებულია $Q(f)$ ოპერატორისა და f ფუნქციის ნორმების ექვივალენტობა $L^{p(\cdot)}(G_m)$ სივრცეში. რომლის საშუალებითაც შეფასებულია $f^{[r]}$ წარმოებულის საუკეთესო მიახლოება f ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების საშუალებით. ასევე შემოღებულია K ფუნქციონალი, რომლის ტერმინებშიც მიღებულია და შეფასებულია საუკეთესო მიახლოება ცვლად მაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში.

Abstract

In general, the derivative of a function on locally compact Abelian group can be defined in many ways. In 1973, Butzer and Wagner ([5]) introduced and investigated the strong derivative $D^{(r)}(f) \in L^p(G)$, $r \in \mathbb{N}$, of $f \in L^p(G)$ function (see def. 6.3). They proved that $D_X^{(1)}(\psi_k) = k\psi_k$, $k \in \mathbb{N}_+$. Onneweer ([21]) later generalized the Butzer-Wagner derivative for Vilenkin groups (see. def. 6.4). Zelin proposed a new definition of P - derivative and integral, which is simpler than one of Butzer-Wagner or Onneweer.

In this master's thesis the existence of $f^{[r]}$ in $L^{p(\cdot)}(G_m)$ is proved. Additionally, analogs of Jackson's and Bernstein's inequalities with respect to Vilenkin system in variable Lebesgue spaces are established. We prove the equivalence of the norms of the operator $Q(f)$ and f in $L^{p(\cdot)}(G_m)$ which is then used to estimate the best approximation of $f^{[r]}$ by the best approximation of f. We also define K-functional and we estimate best approximation in variable Lebesgue spaces in terms of the K.

1 შესავალი

ჰარმონიული ანალიზი ლოკალურად კომპაქტურ ჯგუფებზე თანამედროვე ანალზის ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი მიმართულებაა. ჰარმონიული ანალიზის განვითარების პირველ საფეხურზე არაცხადად ჩანდა მისი კავშირი ალგებრულ სტრუქტურებთან. საკმარისია შევნიშნოთ, რომ სტანდარტული ჰარმონიკები აკმაყოფილებენ $f(x+y)=f(x)f(y), x,y\in\mathbb{R}$ განტოლებას. აღნიშნული ტოლობა საფუძვლად უდევს ტოპოლოგიური ჯგუფებისათვის ერთ-ერთ ფუნდამენტალურ მახასიათებლის ცნებას. აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზის ჩამოყალიბებაში არსებითი გავლენა იქონია გასული საუკუნის 30-იან წლებში მიღებულმა შედეგებმა. კვანტური მექანიკის განვითარებამ სტიმული მისცა კვლევებს ჯგუფთა წარმოდენებში და ოპერატორთა თეორიაში. გასული საუკუნის 20-იან წლებში დაწყებული კვლევები ტოპოლოგიურ ჯგუფებში და ჯგუფთა წარმოდგენებში დაგვირგვინდა ჰაარის მიერ მღებული ფუნდამენტალური შედეგით ლოკალურად კომპაქტურ ჯგუფებზე ძვრის მიმართ ინვარიანტული (არატრივიალური) ინტეგრალის (ზომის) არსებობის შესახებ. ბორის მიერ შექმნილმა თითქმის პერიოდულ ფუნქციათა თეორიამ დიდი გავლენა იქონია ვინერის, ბოხნერის და სხვა მათემატიკოსების შრომებზე, რომელთა ძალისხმევით განვითარდა ჰარმონიული ანალიზის როგორც ტექნიკური არსენალი ასევე მისი გამოყენებს სფეროები (სტატისტიკური მექანიკა, ეროდულობის თეორია, დროებითი მწკრიები და ა. შ). პონტრიაგინ-ვან კამპენის ორადულობის თეორიამ გზა გახსნა ლოკალურად კომპაქტურ აბელის ჯგუფებზე ფურიეს ანალიზის განვითარებას. აღნიშნული თეორია საშულებას იძლევა განხილულ იქნას ფურიეს მწკრივები, ფურიეს გარდაქმნა და ფუნქციის წარმოდგენა ჯგუფის მახასიათებლების საშუალებით როგორც ერთი ბუნების ობიექტები. პეტერისა და ვეილის თეორიამ საშუალება მისცა ფონ ნეიმანს ჯგუფებზე თითქმის პერიოდული ფუნქციების ანალიზით მიეღო მნიშვნელოვანი შედეგები,რომლებიც მჭიდროდ უკავშირდება ჯგუფის წარმოდგენების თეორიას. შემდგომში ჩატარებულმა ინტენსიურმა კვლევებმა შექმნა მათემატიკის უმნიშვნელოვანესი დარგი აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზი, რომლის ერთ-ერთი მნიშნელოვანი მახასიათებელია ჯგუფის თვისებების გამოყენება კვლევებში. თანამედროვე აბსტრაქტული ჰარმონიული ანალიზის მნშვნელოვანი მიმართულებებია: დადებითად განსაზღვრული ფუნქციების თეორია, თითქმის პერიოდულ ფუნქციათა თეორია, ფუნქციათა სპექრტრალური თეორია და მისი ერთ-ერთი უმნიშვნელოვანესი - სპექრტრალური სინთეზის პრობლემა, ნახვევის ტიპის განტოლებები ჯგუფებზე, ჰარმონიული ანალიზი ნულგანზომილებიან ლოკალურად კომპაქტურ ჯგუფებზე, ფურიეს არატრიგონომეტრიული მწკრივები, ჰარმონიული ანალიზი ლოკალურად კომპაქტურ ველებზე, ლოკალურად კომპაქტურ ჯგუფებზე სასრული ბორელის ზომების ბანახის ალგებრა, ძვრის მიმართ ინვარიანტულ ოპერატორთა თეორია. ჩვენი ნაშრომი ეძღვნება ნულგანზომილებიან ლოკალურად კომპაქტურ აბელის ჯგუფებზე ფურიეს ანალიზის ზოგიერთ საკითხს. ვთქვათ G ლოკალურად კომპაქტური არსებითად არაბმული ჯგუფია თვლა-

დობის მეორე აქსიომით. ამ შემთხვევაში ტოპოლოგია მოიცემა ერთმანეთში ჩალაებული ღია ქვეჯგუფების საშუალებით:

$$\supset G_{-n} \supset ... \supset G_0 \supset G_1 \supset ... \supset G_n \supset ...,$$

ისეთი, რომ

$$\bigcap_{n\in\mathbb{Z}} G_n = \{0\}, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} G_n = G.$$

აღნიშნული თვისებები საშუალებას იძლევა კლასიკური ფურიეს ანალიზის პრობლემატიკა (ევკლიდურ $\mathbb{R}^n$ სივრცეზე და $\mathbb{T}^n$ ტორზე) განხილული იქნეს უფრო ზოგად ჯგუფებზე (ვილენკინის ჯგუფები, $\mathbb{Q}_p$ ველები).

ნაშრომის მეორე და მესამე თავში მოყვანილია ძირითადი განსაზღვრებები და დებულებები ტოპოლოგიიდან და ჯგუფთა თეორიიდან. ასევე, მოყვანილია ტოპოლოგიური ჯგუფისა და მასთან დაკავშირებული განსაზღვრებები თუ დებულებები. მეოთხე თავში მოყვანილია მოცემული სამაგისტრო ნაშრომისთვის აუცილებელი თეორემა ლოკალურად კომპაქტურ ჯგუფებზე ჰაარის ზომის არსებობის შესახებ. მეხუთე თავში მიმოხილულია ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფების მაგალითები: კერძოდ, G_m ვილენკინისა და $\mathbb{Z}_p$ ჯგუფები. მეექვსე თავში განხილულია ვილენკინის სისტემასთან დაკავშირებული ფაქტები ლებეგის წონიან და ცვლად მაჩვენებლიან სივრცეებში. ასევე, მოყვანილია წარმოებულის სხვადასხვა განსაზღვრებები და საბოლოოდ მეშვიდე თავში ჩამოყალიბებულია და დამტკიცებულია სამაგისტო ნაშრომის ძირითადი შედეგები.

2 ტოპოლოგია

მოცემულ თავში მოვიყვანთ განსაზღვრებებსა და თეორემებს ტოპოლოგიიდან რომელიც საჭიროა მოცემული სამაგისტრო ნაშრომისთვის.

განსაზღვრება 2.1. *ვთქვათ, X მოცემული არაცარიელი სიმრავლეა. ტოპოლოგია X სიმრავლეზე არის X-ის ქვესიმრავლეთა ოჯახი $\mathcal{T}$ ისეთი, რომ*

- $X, \varnothing \in \mathcal{T}$;
- *თუ $\{U_i\}_{i \in I}$ არის სიმრავლეთა ნებისმიერი ოჯახი $\mathcal{T}$-დან, მაშინ $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$;*
- *თუ $\{U_i\}_{i=1}^n$ არის სიმრავლეთა სასრული ოჯახი $\mathcal{T}$-დან, მაშინ $\bigcap_{i=1}^n U_i \in \mathcal{T}$.*

თუ $\mathcal{T}$ არის ტოპოლოგია X-ზე მაშინ დალაგებულ წყვილს $(X, \mathcal{T})$-ს ეწოდება ტოპოლოგიური სივრცე. როდესაც გასაგები იქნება თუ რომელი ტოპოლოგია გვაქვს მოცემული X-ზე სიმარტივისთვის ვიტყვით, რომ მოცემული გვაქვს ტოპოლოგიური სივრცე X და ვიგულისხმებთ დალაგებულ $(X, \mathcal{T})$ წყვილს.

$\mathcal{P}(X)$-ით აღვნიშნოთ X სიმრავლის ყველა ქვესიმრალეთა სიმრავლე. ადვილი დასანახია, რომ $(X, \mathcal{P}(X))$ და $(X, \{\varnothing, X\})$ არიან ტოპოლოგიური სივრცეები. პირველს ეწოდება დისკრეტული ტოპოლოგია ხოლო მეორეს ტრივიალური ტოპოლოგია.

U-ს ეწოდება ღია X-ში თუ $U \in \mathcal{T}$ და ეწოდება ჩაკეტილი X-ში თუ $U^c \in \mathcal{T}$. თუ U არის ღია სიმრავლე X-ში და ის შეიცავს $x \in X$-ს მაშინ U-ს ეწოდება x-ს წერტილის ღია მიდამო.

დე მორგანის კანონები: ვთქვათ I არის ინდექსთა რაიმე სიმრავლე ხოლო $U_i \subset X$, $i \in I$, მაშინ

$$\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} U_i^c, \qquad \left(\bigcap_{i \in I} U_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} U_i^c,$$

სადაც U_i^c სიმბოლოთი აღნიშნულია U_i სიმრავლის დამატება, ანუ $U_i^c = X \setminus U_i$.

შენიშვნა 2.1. *ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრებიდან და დე მორგანის კანონებიდან გამომდინარეობს, რომ ღია სიმრავლეების ნებისმიერი გაერთიანება და სასრული თანაკვეთა ღიაა და ჩაკეტილი სიმრავლეების სასრული გაერთიანება და ნებისმიერი თანაკვეთა ჩაკეტილია.*

ვთქვათ $\mathcal{T}_1$ და $\mathcal{T}_2$ არის ორი ტოპოლოგია X-ზე ისეთი, რომ $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$ მაშინ ვიტყვით, რომ $\mathcal{T}_1$ სუსტია ვიდრე $\mathcal{T}_2$. ცხადია, რომ ტრივიალური ტოპოლოგია არის ყველაზე სუსტი ტოპოლოგია X-ზე ხოლო დისკრეტული ტოპოლოგია არის ყველაზე ძლიერი. თუ $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ მაშინ არსებობს ერთადერთი ყველაზე სუსტი ტოპოლოგია X-ზე $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ რომელიც შეიცავს $\mathcal{E}$-ს, მას ეწოდება $\mathcal{E}$-ით წარმოქმნილი ტოპოლოგია.

განსაზღვრება 2.2. *ვთქვათ X არის ტოპოლოგიური სივრცე და $A \in X$. A სიმრავლის ჩაკეტვა ეწოდება A სიმრავლის მომცველი ყველა ჩაკეტილი სიმრავლის თანაკვეთას, და ის აღინიშნება $\overline{A}$ სიმბოლოთი.*

განსაზღვრება 2.3. *ვთქვათ X არის ტოპოლოგიური სივრცე და $A \in X$. A სიმრავლის* ***შიგანი*** *ეწოდება A სიმრავლში შემავალი ყველა ღია სიმრავლის გაერთიანებას, და ის აღინიშნება A^o სიმბოლოთი.*

შენიშვნა 2.2. *A სიმრავლე არის ჩაკეტილი X-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $A = \overline{A}$ და ღიაა X-ში მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $A = A^o$.*

განსაზღვრება 2.4. *თუ $\overline{A} = X$ A-ს ეწოდება მკვრივი X-ში, მეორესმხრივ თუ $(\overline{A})^o = \emptyset$ მაშინ A-ს ეწოდება არსად მკვრივი.*

ხშირად ძალზე რთულია ან შეუძლებელია დავაკონკრეტოთ ტოპოლოგიის ყველა სიმრავლე. ამ სირთულისთვის გვერდის ავლისთვის მოგვყავს თეორემები რომლითაც შესაძლებელია წამოვქმნათ ტოპოლოგია სიმრავლეების პატარა ოჯახიდან.

თუ $\mathcal{T}$ არის ტოპოლოგია X-ზე, $x \in X$ წერტილის მიდამოთა ბაზა არის ოჯახი $\mathcal{N} \subset \mathcal{T}$ ისეთი, რომ

- $x \in V$ ყოველი $V \in \mathcal{N}$,
- თუ $U \in \mathcal{T}$ და $x \in U$, მაშინ არსებობს $V \in \mathcal{N}$ ისეთი, რომ $x \in V$ და $V \subset U$.

ტოპოლოგიის ბაზისი $\mathcal{T}$-თვის არის ოჯახი $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ რომელიც ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის შეიცავს მის მიდამოთა ბაზას $\mathcal{T}$-ს მიმართ.

თეორემა 2.1. *თუ $\mathcal{T}$ არის ტოპოლოგია X-ზე და $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$, მაშინ $\mathcal{E}$ არის $\mathcal{T}$ ტოპოლოგიის ბაზისი მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ყოველი არაცარიელი $U \in \mathcal{T}$ არის $\mathcal{E}$-ის ელემენტების გაერთიანება.*

დამტკიცება. თუ $\mathcal{E}$ არის ბაზა, $U \in \mathcal{T}$ და $x \in U$ მაშინ არსებობს $V_x \in \mathcal{E}$ ისეთი, რომ $x \in V_x \subset U$, და შესაბამისად $U = \bigcup_{x \in U} V_x$. პირიქით თუ ყოველი არაცარიელი $U \in \mathcal{T}$ არის გაერთიანება $\mathcal{E}$-ს ელემენტების, მაშინ $\{V \in \mathcal{E} : x \in V\}$ წარმოადგენს x წერტილის მიდამოთა ბაზას, ანუ $\mathcal{E}$ არის ბაზისი. □

თეორემა 2.2. *თუ $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, იმისთვის, რომ $\mathcal{E}$ იყოს ტოპოლოგიის ბაზისი X-ზე აუცილებელია და საკმარისი რომ შესრულდეს შემდეგი ორი პირობა:*

- *ყოველი $x \in X$ შედის რომელიმე $V \in \mathcal{E}$,*
- *თუ $U, V \in \mathcal{E}$ და $x \in U \cap V$ მაშინ არსებობს $W \in \mathcal{E}$ ისეთი, რომ $x \in W \subset (U \cap V)$.*

დამტკიცება. აუცილებლობა ცხადია, მართლაც ვთქვათ $\mathcal{E}$ არის ტოპოლოგიის ბაზისი მაშინ ცხადია პირველი პირობა შესრულებულია, ამასთან თუ $U, V \in \mathcal{E}$ და $x \in U \cap V$ მაშინ $U \cap V$ ღიაა და ბაზისის განმარტების ძალით არსებობს $V \in \mathcal{E}$ ისეთი, რომ $x \in V \subset U \cap V$. ახლა დავამტკიცოთ საკმარისობა ამისთვის განვიხილოთ:

$$\mathcal{T} = \{U \subset X : \text{ყოველი}\, x \in U\text{-თვის არსებობს}\, V \in \mathcal{E}\, \text{ისეთი, რომ}\, x \in V \subset U\},$$

მაშინ $X \in \mathcal{T}$ პირველი პირობის ძალით და $\emptyset \in \mathcal{T}$ ტრივიალურად. ცხადია $\mathcal{T}$ ჩაკეტილია ნებისმიერი გაერთიანებების მიმართ. ახლა ვაჩვენოთ, რომ ის ჩაკეტილია სასრული თანაკვეთების მიმართ, ამისთვის საკმარისია განვიხილოთ ორი სიმრავლის შემთხვევა. მართლაც, ვთქვათ $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ და $x \in U_1 \cap U_2$ მაშინ x-ის მიდამოთა ბაზის განსაზღვრების ძალით არსებობს $V_1, V_2 \in \mathcal{E}$ ისეთი, რომ $x \in V_1 \subset U_1$ და $x \in V_2 \subset U_2$ ასევე მეორე პირობის ძალით არსებობს $W \in \mathcal{E}$ ისეთი, რომ $x \in W \subset (V_1 \cap V_2)$ მაშასადამე $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ და შესაბამისად $\mathcal{T}$ არის ტოპოლოგია და ცხდაია $\mathcal{E}$ არის მისი ბაზისი. □

თეორემა 2.3. *თუ $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, ტოპოლოგია $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ წარმოქმნილი $\mathcal{E}$-ით შეიცავს $\emptyset, X$, და $\mathcal{E}$-ის ელემენტების ნებისმიერი სასრული თანაკვეთების ნებისმიერ გაერთიანებებს.*

დამტკიცება. $\mathcal{E}$-ის ელემენტების ნებისმიერი სასრული თანაკვეთათა ოჯახი X-თან ერთად აკმაყოფილებს თეორემა 2.2-ის პირობებს და შესაბამისად თეორემა 2.1-ის ძალით ასეთი სიმრავლეების ყველა გაერთიანებები $\emptyset$-სთან ერთად არის ტოპოლოგია და ცხადია ის შედის $\mathcal{T}(\mathcal{E})$-ში, მაშასადამე ის ემთხვევა $\mathcal{T}(\mathcal{E})$-ს. ამით თეორემის დამტკიცება დასრულებულია. □

ვიტყვით, რომ $(X, \mathcal{T})$ ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს **თვლადობის პირველ აქსიომას**, თუ ყოველი $x \in X$-თვის არსებობს თვლადი მიდამოთა ბაზა $\mathcal{T}$-თვის.

შენიშვნა 2.3. *შევნიშნოთ, რომ თუ X ტოპოლოგიური სივრცე არის თვლადობის პირველი აქსიომით, მაშინ ყოველი $x \in X$ წერტილისთვის არსებობს მისი მიდამოთა ბაზა $\{U_i\}_1^\infty$ ისეთი, რომ $U_i \supset U_{i+1}$ ყოველი i-თვის. მართლაც, თუ $\{V_i\}_1^\infty$ არის x-ის მიდამოთა ნებირმიერი ბაზა, მაშინ ჩვენ შეგვიძლია ავიღოთ $U_i = \bigcap_{j=1}^{i} V_j$.*

ვიტყვით, რომ $(X, \mathcal{T})$ ტოპოლოგიური სივრცე აკმაყოფილებს **თვლადობის მეორე აქსიომას**, თუ $\mathcal{T}$-ს აქვს თვლადი ბაზისი. ასევე ვიტყვით, რომ $(X, \mathcal{T})$ არის სეპარაბელური თუ X-ს აქვს თვლადი ყველგან მკვრივი ქვესიმრავლე. ცხადია, რომ თუ ტოპოლოგიური სივრცე არის თვლადობის მეორე აქსიომით მაშინ ის არის ტოპოლოგიური სივრცე თვლადობის პირველი აქსიომით.

თეორემა 2.4. *[12] ყოველი ტოპოლოგიური სივრცე თვლადობის მეორე აქსიომით არის სეპარაბელური.*

ვიტყვით, რომ $\{x_j\}$ მიმდევრობა X ტოპოლოგიურ სივრცეში კრებადია $x \in X$-სკენ $(x_j \to x)$ თუ x-ის ყოველი U მიდამოსთვის არსებობს $N \in \mathbb{N}$ ისეთი რომ $x_j \in U$ ყოველი $j > N$.

თეორემა 2.5. *[12] თუ X არის თვლადობის პირველი აქსიომით და $A \subset X$ მაშინ $x \in \overline{A}$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა არსებობს მიმდევრობა $\{x_j\} \subseteq A$ რომელიც კრებადია x-სკენ.*

ზემოთ გაკეთებული შენიშვნის ძალით მოცემული თეორემა სამართლიანია X ტოპოლოგიური სივრცისთვის თვლადობის მეორე აქსიომით. ახლა მოვიყავნოთ ტოპოლოგიური სივრცის აქსიომები. თუ X ტოპოლოგიურ სივრცეს აქვს T_j თვისება ვიტყვით, რომ X არის T_j სივრცე ან ტოპოლოგია X-ზე არის T_j

T_0 : თუ $x \neq y$ მაშინ არსებობს ღია სიმრავლე რომელიც შეიცავს x-ს მაგრამ y-ს არა ან არსებობს ღია სიმრავლე რომელიც შეიცავს y-ს მაგრამ არა x-ს.

T_1 : თუ $x \neq y$ მაშინ არსებობს ღია სიმრავლე რომელიც შეიცავს y-ს მაგრამ არა x-ს.

T_2 : თუ $x \neq y$ მაშინ არსებობს თანაუკვეთი ღია U, V სიმრავლეები ისეთი, რომ $x \in U$ და $y \in V$.

T_3 : X არის T_1 სივრცე და ყოველი ჩაკეტილი $A \subset X$ და ყოველი $x \in A^c$ წერტილისთვის არსებობს თანაუკვეთი ღია U, V სიმრავლეები ისეთი, რომ $x \in U$ და $A \subset V$.

T_4 : X არის T_1 სივრცე და ყოველი თანაუკვეთი ჩაკეტილი $A, B \subset X$ სიმრავლეებისთვის არსებობს თანაუკვეთი ღია U, V სიმრავლეები ისეთი, რომ $A \subset U$ და $B \subset V$.

T_2 სივრცეს ეწოდება **ჰაუსდორფის** სივრცე, T_3 სივრცეს ეწოდება **რეგულარული** სივრცე და T_4-ს ეწოდება **ნორმალური** სივრცე.

თეორემა 2.6. *თუ X არის ჰაუსდორფის სივრცე, მაშინ ყოველი $x \in X$-თვის $\{x\}$ ჩაკეტილი სიმრაველა.*

დამტკიცება. ვთქვათ X არის ჰაუსდორფის, მაშინ ყოველი $y \neq x$-თვის არსებობს ღია სიმრავლე U_y ისეთი, რომ $y \in U_y$ მაგრამ $x \notin U_y$ მაშასადამე $\{x\}^c = \bigcup_{y \neq x} U_y$ არის ღია და შესაბამისად $\{x\}$ ჩაკეტილი. $\square$

ჰაარის ზომის არსებობა გარანტირებულია თუ ტოპოლოგიური სივრცე არის ჰაუსდორფის. ამიტომ შემდეგ თავებში ვიმუშავებთ ასეთ სივრცეებზე. ახლა მოვიყვანოთ უწყვეტი ასახვის განსაზღვრება და მისი რამოდენიმე თვისება.

განსაზღვრება 2.5. *ვთქვათ X და Y ტოპოლოგიური სივრცეებია და $f : X \to Y$ მოცემული ასახვაა. ვიტყვით, რომ f ასახვა არის უწყვეტი თუ $f^{-1}(V)$ ღიაა X-ში ყოველი ღია $V \subseteq Y$-თვის. ვიტყივთ, რომ f ასახვაა უწყვეტია $x \in X$ წერტილში თუ $f(x)$-ის ყოველი V მიდამოსთვის არსებობს x-ის მიდამო U ისეთი, რომ $f(U) \subset V$ ან ექვივალენტურად $f^{-1}(V)$ არის x-ის მიდამო $f(x)$-ის ყოველი V მიდამოსათვის.*

თეორემა 2.7. *ასახვა $f : X \to Y$ არის უწყვეტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ის უწყვეტია ყველა $x \in X$ წერტილში.*

შემდეგი თეორემა ძალიან ამარტივებს ასახვის უწყვეტობის შემოწმებას.

თეორემა 2.8. *ვთქვათ ტოპოლოგია Y-ზე წარმოქმნილია $\mathcal{E}$ სიმრავლეთა ოჯახით, მაშინ $f : X \to Y$ არის უწყვეტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $f^{-1}(V)$ არის ღია X-ში ყოველი $V \in \mathcal{E}$.*

ახლა მოვიყვანოთ კომპაქტური ტოპოლოგიური სივრცის განსაზღვრება და მასთან დაკავშირებული მნიშვნელოვანი თეორემები დაუმტკიცებლად.

განსაზღვრება 2.6. *ვთქვათ X არის ტოპოლოგიური სივრცე და $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$, არის X-ის ქვესიმრავლეთა რაიმე ოჯახი ე.ი $U_\alpha \subseteq X$, $\alpha \in A$. ვიტყვით, რომ მოცემული სიმრავლეთა ოჯახი არის X-ის დაფარვა თუ $X = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$. ასევე ვიტყვით, რომ მოცემული გვაქვს X-ის ღია დაფარვა თუ ყოველი U_α ღიაა.*

განსაზღვრება 2.7. *ვიტყვით, რომ ტოპოლოგიური სივრცე X არის კომპაქტური თუ X-ის ყოველი ღია დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა ე.ი თუ $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ არის X ტოპოლოგიური სივრცის ღია დაფარვა მაშინ არსებობს ინდექსთა სიმრავლის სასრული ქვესიმრავლე $B \subseteq A$ ისეთი, რომ $X = \bigcup_{\alpha \in B} U_\alpha$.*

X ტოპოლოგიური სივრცის $Y \subseteq X$ ქვესიმრავლე ეწოდება **კომპაქტი** თუ ის არის კომპაქტი ფარდობით ტოპოლოგიაში. ე.ი $Y \subseteq X$ არის კომპაქტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ყოველი $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ღია სიმრავლეთა ოჯახისთვის X-ში არსებობს ინდექსთა სიმრავლის სასრული ქვესიმრავლე $B \subseteq A$ ისეთი, რომ $Y \subseteq \bigcup_{\alpha \in B} U_\alpha$. დე მორგანის კანონების გამოყენებით კომპაქტურობა შეგვიძლია დავახასიათოთ ჩაკეტილი სიმრავლის ტერმინებში. ვიტყვით, რომ $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ X-ის ქვესიმრავლეთა ოჯახს აქვს **სასრული თანაკვეთის თვისება** თუ ყოველი სასრული $B \subseteq A$-თვის $\bigcap_{\alpha \in B} F_\alpha \neq \emptyset$. სამართლიანია შემდეგი თეორემები:

თეორემა 2.9. *X ტოპოლოგიური სივრცე არის კომპაქტი მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ყოველი $\{F_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ჩაკეტილი სიმრავლეების ოჯახისთვის სასრული თანაკვეთის თვისებით გვაქვს $\bigcap_{\alpha \in A} F_\alpha \neq \emptyset$.*

თეორემა 2.10. *კომპაქტური სივრცის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე კომპაქტია.*

თეორემა 2.11. *ჰაუსდორფის სივრცის ყოველი კომპაქტური ქვესიმრავლე ჩაკეტილია.*

ტოპოლოგიურ სივრცეს ეწოდება **ლოკალურად კომპაქტური** თუ ყოველ წერტილს აქვს კომპაქტური მიდამო. მოცემულ სამაგისტრო ნაშრომში ჩვენ დაინტერესებულები ვართ ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური სივრცეებით. სამართლიანია შემდეგი თეორემა

თეორემა 2.12. *ვთქვათ X არის ლოკალურად კომპაქტური ჰაუსდორფის სივრცე, $U \subseteq X$ ღიაა და $x \in U$ მაშინ არსებობს x-ის კომპაქტური მიდამო N ისეთი, რომ $N \subseteq U$.*

განსაზღვრება 2.8. *ვთქვათ $(X, \mathcal{T})$ არის ტოპოლოგიური სივრცე. ვიტყვით, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე არის **არაბმული** თუ ის წარმოდგება ორი თანაკუვეთი არაცარიელი ღია სიმრავლის გაერთიანების სახით. ე.ი არსებობს არაცარიელი $A, B \in \mathcal{T}$, ისეთი, რომ $A \cap B = \emptyset$ და $X = A \cup B$. სხვა შემთხვევაში ვიტყვით, რომ X ტოპოლოგიური სივრცე არის **ბმული**.*

ვიტყვით, რომ X ტოპოლოგიური სივრცის ქვესიმრავლე არის ბმული თუ ის ბმულია ქვესივრცის ტოპოლოგიაში.

თეორემა 2.13. *ვთქვათ X არის ტოპოლოგიური სივრცე, მაშინ შემდეგი წინადადებები ექვივალენტურია*

- *X არის ბმული, ე.ი ის არ წარმოდგება ორი თანაუკვეთი არაცარიელი ღია სიმრავლის გაერთიანების სახით,*
- *X ტოპოლოგიური სივრცის ერთდროულად ღია და ჩაკეტილი სიმრავლეები არის მხოლოდ X და ცარიელი სიმრავლე,*
- *X ტოპოლოგიური სივრცის სიმრავლე ცარიელი საზღვრით არის მხოლოდ X და ცარიელი სიმრავლე,*
- *X არ წარმოდგება ორი არაცარიელი განცალებადი სიმრავლის გაერთიანების სახით,*
- *ყველა უწყვეტი ფუნქცია X-დან $\{0, 1\}$-ში არიან მხოლოდ მუდმივი ფუნქციები. სადაც, $\{0, 1\}$ არის ტოპოლოგიური სივრცე დისკრეტული ტოპოლოგიით.*

ვთქვათ, X ტოპოლოგიური სივრცეა და $x \in X$, ადვილი დასანახია, რომ ბმული სიმრავლეების ნებისმიერი გაერთიანება რომელიც x-ს შეიცავს იქნება ისევ ბმული სიმრავლე.

განსაზღვრება 2.9. *$x \in X$ წერტილის **ბმული კომპონენტი** ეწოდება ყველა ბმული სიმრავლის გაერთიანებას რომელიც შეიცავს x-ს. x-ის ბმული კომპონენტი არის ერთადერთი მაქსიმალური ბმული სიმრავლე რომელიც მოიცავს x-ს.*

განსაზღვრება 2.10. *არაცარიელი X ტოპოლოგიური სივრცის მაქსიმალურ ბმულ სიმრავლეებს ეწოდება X ტოპოლოგიური სივრცის **ბმული კომპონენტები**.*

ნებისმიერი ტოპოლოგიური X სივრცის ბმული კომპონენტები წარმოქმნიან X-ის დანაწილებას. ე.ი ისინი არიან თანაუკვეთები, თითოეული კომპონენტი არის არაცარიელი და მათი

გაერთიანება წარმოადგენს მთლიან X სივრცეს. ადვილი დასანახია, რომ ყოველი კომპონენ-ტი არის X ჩაკეტილი ქვესიმრავლე. აქედან გამომდინარეობს, რომ თუ კომპონენტების რაო-დენობა სასრულია მაშინ თითოეული ასევე არის X-ს ღია ქვესიმრავლე. ამასთან მოცემული საზოგადოდ არაა სამართლიანი, როცა კომპონენტების რაოდენობა უსასრულოა.

განსაზღვრება 2.11. *X ტოპოლოგიურ სივრცეს რომელშიც ბმული კომპონენტები მხოლოდ ერთ-წერტილიანი სიმრავლეებია ეწოდება* ***ტოტალურად არაბმული****.*

მაგალითი 2.1. *ტოტალურად არაბმული სივრცეს წარმოადგენს p-ადიკური რიცხვების $\mathbb{Q}_p$, ველი. (იხ. 5.2)*

3 ჯგუფები

ამ თავში ჩვენ მიმოვიხილავთ ზოგიერთ ფუნდამენტალურ საკითხს ჯგუფთა თეორიიდან.

განსაზღვრება 3.1. *ვთქვათ, G არაცარიელი სიმრავლეა და $* : G \times G \to G$ არის მასზე განსაზღვრული ბინარული ოპერაცია. წყვილს $(G, *)$ ეწოდება ჯგუფი თუ მასზე განსაზღვრული ბინარული ოპერაცია აკმაყოფილებს შემდეგ აქსიომებს:*

- ***ასოციაციურობა:*** *$a * (b * c) = (a * b) * c$ ყოველი $a, b, c \in G$-თვის,*
- ***ერთეულოვანი ელემენტის არსებობა:*** *G-ში არსებობს ელემენტი e ისეთი, რომ ყოველი $a \in G$-თვის გვაქვს $a * e = e * a = a$. ასეთი ელემენტი ერთადერთია და მას ეწოდება G ჯგუფია ერთეულოვანი ელემენტი,*
- ***შებრუნებული ელემენტის არსებობა:*** *ყოველი $a \in G$-სთივს არსებობს ელემენტი $a^{-1} \in G$ ისეთი, რომ $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$. ყოველი a-თვის. ასეთი a^{-1} ელემენტი ერთადერთია მას ეწოდება a-ს შებრუნებული ელემენტი.*

შენიშვნა 3.1. *ვთქვათ, $(G, *)$ არის ჯგუფი. ტრადიციულად "$*$"-ის ნაცვლად წერენ "$\cdot$" სიმბოლოს. "$\cdot$" ბინარულ ოპერაციას უწოდებენ გამრავლებას და $a \cdot b$-ს წაცვლად ხშირად წერენ ab-ს. G ჯგუფის ab ელემენტს უწოდებენ a და b ელემენტების ნამრავლს. ამ შემთხვევაში ერთეულოვანი ელემენტი ხშირად აღინიშნება 1-ით. ზოგჯერ მოსახერხებელია განსაკუთრებით აბელურ ჯგუფებში, ბინარული ოპერაციის ადიციური ჩაწერა, ე.ი $a \cdot b$-ს ნაცვლად წერენ $a + b$-ს და მას უწოდებენ a და b ელემენტების ჯამს. ამ შემთხვევაში ერთეულოვან ელემენტს აღნიშნავენ 0-ით, ხოლო a^{-1}-ის ნაცვლად წერენ $-a$-ს და უწოდებენ a ელემენტის მოპირდაპირე ელემენტს. რადგან მოცემულ ნაშრომში შეხება გვექნება აბელურ ჯგუფებთან.*

განსაზღვრება 3.2. *ვთქვათ, $(G, +)$ არის ჯგუფი. ვიტყვით, რომ G არის* **აბელის ჯგუფი** *თუ ყოველი $a, b \in G$-თვის $a + b = b + a$.*

მაგალითი 3.1. *$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ სიმრავლეები ჩვეულებრივი შეკრების მიმართ წარმოადგენენ აბელური ჯგუფის მაგალითებს. ამ შემთხვევაში ერთეულოვან ელემენტს წარმოადგენს 0 და a ელემენტის შეგრუნებულია $-a$.*

მაგალითი 3.2. *$\mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ სიმრავლეები ჩვეულებრივი გამრავლების მიმართ წარმოადგენენ აბელური ჯგუფის მაგალითებს. ამ შემთხვევაში ერთეულოვან ელემენტს წარმოადგენს 1 და a ელემენტის შეგრუნებულია $\frac{1}{a}$.*

მაგალითი 3.3. *ვთქვათ, $\mathbb{F}$ არის ველი. $GL_n(\mathbb{F})$-ით აღვნიშნოთ სიმრავლე ყველა იმ $n \times n$ რიგის მატრიცებისა, რომელთა ელემენტები ეკუთვნიან $\mathbb{F}$-ს და დეტერმინანტი განსხვავებულია*

ნულისაგან. $GL_n(\mathbb{F})$ წარმოადგენს ჯგუფს მატრიცების ჩვეულებრივი გამრავლების მიმართ. ერთეულოვან ელემენტს წარმოადგენს მარტიცი რომლის დიაგონალზე დგას 1-ები, ხოლო სხვაგან 0-ები. აღნიშნული ჯგუფი არის არა აბელური ჯგუფის მაგალითი.

მაგალითი 3.4. *ვთქვათ $\mathbb{F}$ არის ველი. $M_n(\mathbb{F})$-ით აღვნიშნოთ ყველა $n \times n$ რიგის მატრიცი ელემენტებით $\mathbb{F}$-დან. $M_n(\mathbb{F})$ წარმოადგენს აბელის ჯგუფს მატრიცების შეკრების ოპერაციის მიმართ. ნულოვან ელემენტს წარმოადგენს მატრიცი რომლის ყველა ელემენტი 0-ია.*

მაგალითი 3.5. *ვთქვათ S_n არის $\{1, 2, ..., n\}$-ის ყველა გადანაცვლებათა ერთობლიობა. მაშინ S_n კომპოზიციის $\circ$ ოპერაციასთან ერთად წარმოადგენს ჯგუფს, სადაც ერთეულოვან ელემენტს წარმოადგენს იგივური გადანაცვლება.*

განსაზღვრება 3.3. *ვთქვათ $(G, +)$ არის ჯგუფი და H არის G-ს ქვესიმრავლე. ვიტყვით, რომ H არის G ჯგუფის ქვეჯგუფი თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

- *$H \neq \emptyset$,*
- *თუ $x, y \in H$, მაშინ $x + y \in H$ (ჩაკეტილია G-ს ოპერაციის მიმართ),*
- *თუ $x \in H$, მაშინ $(-x) \in H$ (ჩაკეტილია შებრუნების ოპერაციის მიმართ).*

აღნიშნულ ფაქტს აღვნიშნავთ $H \leq G$ სიმბოლოთი.

განსაზღვრება 3.4. *ვთქვათ G არის ჯგუფი და H არის მისი ქვეჯგუფი, ამასთან $g \in G$. სიმრავლეებს $g + H = \{g + h \,|\, h \in H\}$ და $H + g = \{h + g \,|\, h \in H\}$ ეწოდება შესაბამისად H-ის მარცხენა და მარჯვენა მოსაზღვრე კლასები G-ში და აღინიშნება შესაბამისად G/H და $G \setminus H$ სიმბოლოებით.*

შევნიშნოთ, რომ თუ ჯგუფი აბელურია, მაშინ H ქვეჯგუფის შესაბამისი მარჯვენა და მარცხენა მოსაზღვრე კლასები ერთმანეთს ემთხვევა ე.ი

$$g + H = H + g,$$

მაგრამ ზოგადად მოცემული ტოლობა არ სრულდება. ამისათვის შემოვიტანოთ განსაზღვრება

განსაზღვრება 3.5. *G ჯგუფის H ქვეჯგუფს ეწოდება ნორმალური თუ $g + H = H + g$ ყოველი $g \in G$-თვის.*

თუ H არის G ჯგუფის ნორმალური ქვეჯგუფი, მაშინ შეგვიძლია ვილაპარაკოთ უბრალოდ H-ის მოსაზღვრე კლასებზე. ამასთან შევთანხმდეთ, რომ მოსაზღვრე კლასების სიმრავლეს აღვნიშნავთ G/H-ით.

განსაზღვრება 3.6. *ვთქვათ H არის G ჯგუფის ნორმალური ქვეჯგუფი. თუ H-ის მოსაზღვრე კლასების G/H სიმრავლეში შემოვიტანთ შეკრების ოპერაციას შემდეგნაირად:*

$$(a + H) \oplus (b + H) = (a + b) + H, \quad a, b \in G.$$

ადვილი საჩვენებელია, რომ მოცემული განმარტება კორექტულია და ამასთან ის აკმაყოფილებს ჯგუფის აქსიომებს, მაშასადამე G/H არის ჯგუფი რომელსაც ეწოდება ფაქტორ-ჯგუფი წარმოქმნილი H ქვეჯგუფით.

შენიშვნა 3.2. *თუ G აბელური ჯგუფია, მაშინ ყოველი მისი ქვეჯგუფი აბელურია და მაშასადამე ნორმალური და შესაბამისად G აბელური ჯგუფის ნებისმიერი H ქვეჯგუფისთვის G/H ზემოთ განსაზღვრული ოპერაციის მიმართ იქნება ჯგუფი.*

3.1 ტოპოლოგიური ჯგუფები

განსაზღვრება 3.7. *ვთქვათ, $(G, +)$ არის ჯგუფი და ტოპოლოგიური სივრცე ისეთი, რომ ასახვები*

$$+ : G \times G \to G, \, (x, y) \to x + y,$$

$$- : G \to G, \, x \to -x,$$

*უწყვეტია შესაბამისად G-ს და $G \times G$ ნამრავლის ტოპოლოგიაში. უფრო ზუსტად თუ $a, b \in G$ და $c = a + b$ მაშინ c-ს ნებისმიერი $U(c)$ მიადმოსთვის არსებობს შესაბამისად a და b წერტილების $V(a)$ და $W(b)$ მიდამოები ისეთი, რომ $V(a) + W(b) \subset U(c)$. ასევე $-a \in G$-ს ნებისმიერი $U(-a)$ მიდამოსთვის არსებობს a წერტილის $V(a)$ მიდამო ისეთი, რომ $-V(a) \subset U(-a)$. $(G, +)$-ს მოცემულ ტოპოლოგიასთან ერთად ეწოდება **ტოპოლოგიური ჯგუფი**.*

განსაზღვრება 3.8. *ტოპოლოგიურ ჯგუფს რომელიც არის ჰაუსდორფის და ლოკალურად კომპაქტური ეწოდება **ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფი**. ხოლო თუ ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური ჯგუფი არის კომპაქტური ჩვენ მას **კომპაქტურ ჯგუფს** ვუწოდებთ.*

ვთქვათ $(G, +)$ არის ჰაუსდორფის ტოპოლოგიური აბელური ჯგუფი. იმისათვის, რომ $(G, +)$ აბელურ ჯგუფზე მოიცეს ტოპოლოგია ამისთვის საკმარისია ჩვენ გვქონდეს ბაზა $\{U_\alpha\}$, G ჯგუფის ნულოვანი ელემენტისთვის. ამ შემთხვევაში ნებისმიერი $a \in G$ ელემენტის ბაზა იქნება $a + U_\alpha$.

G აბელური ჯგუფის ნულის მიდამოთა ბაზა აღვნიშნოთ U_0-ით მაშინ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- ყველა სიმრავლის თანაკვეთა U_0-დან არის $\{0\}$,

- ნებისმიერი ორი სიმრავლის თანაკვეთა U_0-დან შეიცავს რომელიმე სიმრავლეს ამ სისტემიდან,

- ყოველი U-თვის U_0-დან არსებობს $V \in U_0$ ისეთი, რომ $V + V \subset U$,

- ყოველი U-თვის U_0-დან და ყოველი $a \in U$-თვის არსებობს $V \in U_0$ ისეთი, რომ $a + V \subset U$.

პირიქით, თუ G არის აბელური ჯგუფი და U_0 სისტემა აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ პირობებს, მაშინ G ჯგუფზე შეიძლება მოიცეს ტოპოლოგია მხოლოდ ერთადერთი გზით, ისე რომ ჯგუფის ოპერაციები იყოს უწყვეტი ამ ტოპოლოგიაში და U_0 სისტემა იქნება ნულის მიდამოთა ბაზა. ხოლო $a \in G$ ელემენტის მიდამოთა ბაზის მისაღებად უნდა ავიღოთ $a + U_\alpha$ სიმრავლეები. (იხ. [24])

ნებისმიერი ჯგუფი შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც ტოპოლოგიური ჯგუფი შემდეგნაირად. თუ თითოეული წერტილის მიდამოთა ბაზა იქნება თავისი თავი ე.ი $U(g) = \{g\}$. ასეთ სისტემატიზირებას ეწოდება დისკრეტული.

ვთქვათ, G არის აბელური ჯგუფი და მოცემული გვაქვს ქვეჯგუფთა შემდეგი სისტემა U_α ისეთი, რომ ნებისმიერი ორი ქვეჯგუფის თანაკვეთა შეიცავს ქვეჯგუფს მოცემული სისტემიდან და ყველა ჯგუფის თანაკვეთა მოცემული სისტემიდან შეიცავს მხოლოდ ნულოვან ელემენტს. ვაჩვენოთ, რომ მოცემული სისტემა აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ 4 პირობას. მართლაც, პირველი ორი პირობა შესრულებულია პირობის ძალით, ხოლო ბოლო ორი პირობა გამოდის იქიდან, რომ U_α არის ჯგუფი. ე.ი მოცემული სისტემა წარმოქმნის G ჯგუფის ნულოვანი ელემენტის ბაზისს. ამ შემთხვევაში ჩვენ ვიტყვით, რომ ტოპოლოგია მოცემულია U_α ქვეჯგუფთა სისტემის საშუალებით. ვთქვათ, მოცემული სისტემა არის თვლადი და ქმნის კლებად მიმდევრობას ე.ი

$$U_1 \supset U_2 \supset \dots \supset U_n \supset \dots .$$

იმისთვის, რომ მოცემულმა ქვეჯგუფებმა განსაზღვროს ტოპოლოგია G-ში საკმარისია, რომ მათი თანაკვეთა მოიცავდეს მხოლოდ ნულოვან ელემენტს.

განსაზღვრება 3.9. *ვთქვათ, G არის ტოპოლოგიური ჯგუფი. H-ს ეწოდება G-ს* ***ქვეჯგუფი*** *თუ შესრულებულია შემდეგი პირობები:*

- *H არის G-ს ქვეჯგუფი ალგებრული აზრით,*

- *H არის ჩაკეტილი ქვესიმრავლე G-ს ტოპოლოგიაში.*

ტოპოლოგიურ ჯგუფების შემთხვევაში ჩვენ არ განვიხილავთ ყველა ჰომეომორფიზმებს, ამ შემთხვევაში ჩვენ განვიხილავთ, მხოლოდ უწყვეტ ჰომეომორფიზმებს.

განსაზღვრება 3.10. *ვთქვათ, მოცემული გვაქვს ორი ჯგუფი.* $(G, +)$ *და* $(G', \oplus)$ *ვიტყვით, რომ მოცემული ჯგუფები იზომორფულია თუ არსებობს ჰომეომორფული* φ *ასახვა* G*-სი* G'*-ზე ისეთი, რომ*

$$\varphi(g_1 + g_2) = \varphi(g_1) \oplus \varphi(g_2), \quad \forall g_1, g_2 \in G.$$

თუ H არის აბელური ტოპოლოგიური G ჯგუფის ქვეჯგუფი, მაშინ G დაიყოფა თანაუკვეთ მოსაზღვრე კლასებად ამ ქვეჯგუფში. G/H-ში შემოგვაქვს ტოპოლოგია შემდეგნაირად: ვთქვათ, $\{U_\alpha\}$ არის ნულის მიდამოების სრული სისტემა G-ში. შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ $\{U_\alpha + H\}$ სისტემა აკმაყოფილებს ზემოთ მოყვანილ ოთხივე პირობას და თუ მოცემულ სისტემას ავიღებთ G/H ჯგუფის ნულის მიდამოდ ე.ი H-ის. G/H გახდება ტოპოლოგიური ჯგუფი.

სამართლიანია შემდეგი წინადადება:

თეორემა 3.1. G *ტოპოლოგიური ჯგუფის ყოველი ღია ქვეჯგუფი* H *არის ასევე ჩაკეტილი.*

დამტკიცება. მართლაც, თუ H ღია ქვეჯგუფია მაშინ $g + H$-ც იქნება ღია ყოველი $g \in G$-თვის. ავიღოთ ყველა მოსაზღვრე კლასების გაერთიანება რომლებიც არ თანაიკვეთება H-თან, მაშინ მოცემული გაერთიანება იქნება ღია და რადგან H არის მოცემული გაერთიანების დამატება მივიღებთ, რომ H არის ჩაკეტილი G-ში. □

თეორემა 3.2. *ვთქვათ,* G *აბელური ტოპოლოგიური ჯგუფი და ნულოვანი ელემენტის ყოველი მიდამო შეიცავს ღია ქვეჯგუფს, მაშინ ნულოვანი ელემენტის ბმული კომპონენტი არის* $\{0\}$.

დამტკიცება. მართლაც, A არის ნულის ბმული მიდამო G-ში. თუ $A \neq \{0\}$ (იხილეთ პირველი თვისება) მაშინ არსებობს ნულის მიდამო U ისეთი, რომ $U \cap A \neq A$ და რომელიც შეიცავს ღია V ქვეჯგუფს. როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ V არის ღია და ჩაკეტილი ერთდროულად G-ში. შესაბამისად $V \cap A$ არის ერთდროულად ჩაკეტილი და ღია A-ში, მაგრამ მისი დამატება A სიმრავლემდე ე.ი $A \setminus (V \cap A)$ იქნება ასევე ჩაკეტილი და ღია A-ში. შესაბამისად მივიღეთ წინააღმდეგობა, რომ A არის ნულოვანი ელემენტის ბმული კომპონენტი. ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

განსაზღვრება 3.11. *ჯგუფს რომლის ნულოვენი ელემენტის ბმული კომპონენტი არის* $\{0\}$ *ეწოდება* ***ნულგანზომილებიანი ჯგუფი****.*

ჩვენ დავამტკიცეთ, რომ თუ ტოპოლოგიურ G ჯგუფში ტოპოლოგია მოიცემა ქვეჯგუფების საშუალებით მაშინ G არის ნულგანზომილებიანი. მოცემული წინადადების შებრუნებული საზოგადოდ არაა სამართლიანი. მაგალითს წარმოადგენს $\mathbb{Q}$ რაციონალური რიცხვები ჩვეულებრივი შეკრების ოპერაციის მიმართ.

ტიხონოვის თეორემა კომპაქტურ ჯგუფებთან დაკავშირებით წარმოადგენს ერთ-ერთ ძირითად თეორემას რომელიც მდგომარეობს შემდეგში

თეორემა 3.3. *კომპაქტური ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლი წარმოადგენს კომპაქტურ ჯგუფს.*

შევნიშნოთ, ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფის შემდეგი ძალიან მნიშვნელოვანი თვისება.

თეორემა 3.4. *[24] ვთქვათ G არის ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფი თვლადობის მეორე აქსიომით და ამასთან ის არის ნულგანზომილებიანი, მაშინ ტოპოლოგია G სიმრავლეში შეიძლება მოიცეს ქვეჯგუფების კლებადი მიმდევრობის სახით.*

როგორც ზემოთ ვაჩვენეთ მოცემული წინადადების შებრუნებული სამართლიანია ყველა ტოპოლოგიური ჯგუფისთვის. შესაბამისად ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფის შემთხვევაში ნაცვლად იმისა, რომ ვთქვათ ჯგუფი რომელზეც ტოპოლოგია მოიცემა ქვეჯგუფების ჯაჭვის საშუალებით ვიტყვით, რომ არის ნულგანზომილებიანი ჯგუფი.

ვთქვათ, G არის ნულგანოზმილებიანი კომპაქტური აბელური ჯგუფი თვლადობის მეორე აქსიომით. მაშინ ტოპოლოგია G-ზე მოიცემა ერთმანეთში ჩალაგებული ღია ქვეჯგუფების საშუალებით:

$$G = U_0 \supset U_1 \supset ... \supset U_n \supset ... .$$

თუ G კომპაქტურია მაშინ თითოეული U_n ქვეჯგუფის მოსაზღვრე კლასების რაოდენობა სასრულია. მართლაც, რადგან U_n-ის მოსაზღვრე კლასების ერთობლიობა ქმნის G-ს ღია დაფარვას და რადგან ყოველი ღია დაფარვიდან გამოიყოფა სასრული ქვედაფარვა, ამიტომ U_n-ის მოსაზღვრე კლასების ერთობილობა სასრულია. შესაბამისად ყველა U_n/U_{n+1} ფაქტორ-ჯგუფი სასრულია. თუ საჭირო იქნება ჩვენ შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ ყოველი ფაქტორ-ჯგუფი U_n/U_{n+1} არის ციკლური და მისი p_{n+1} რიგი არის მარტივი. ასეთ ქვეჯგუფთა კლებად მიმდევრობას ჩვენ ვუწოდებთ მთავარს.

ყოველი $n \in \mathbb{N}$-თვის ავარჩიოთ g_n ელემენტი $U_n \setminus U_{n+1}$ სიმრავლიდან. ახლა, რადგან U_n/U_{n+1} ციკლური ჯგუფია p_{n+1} მარტივი რიგით ცხადია, $p_{n+1}g_n \in U_{n+1}$ და $ag_n \notin U_{n+1}$ სადაც $a = 1, ..., p_{n+1} - 1$. შესაბამისად ნებისმიერი ელემენტი $g \in U_n$-დან შეგვიძლია წარმოვიდგინოთ შემდეგი სახით:

$$g = ag_n + h, \quad h \in U_{n+1},$$

მართლაც, რადგან U_n/U_{n+1} ჯგუფის ელემენტებს წარმოადგენენ შემდეგი სიმრავლეები

$$U_{n+1}, g_n + U_{n+1}, ..., (p_{n+1} - 1)g_n + U_{n+1},$$

და რადგან მოცემული წარმოადგენს U_n-ის დაფარვას ამიტომ იარსებებს $a, a = 0, 1, ..., p_{n+1} - 1$ ისეთი, რომ $g \in ag_n + U_{n+1}$. აქედან გამომდინარე იარსებებს $h \in U_{n+1}$ ისეთი, რომ

$$g = ag_n + h.$$

ვთქვათ, $g \in G$, მაშინ მიღებული ტოლობის გათვალისწინებით, მივიღებთ, რომ ყოველი m-თვის სამართლიანია შემდეგი წარმოდგენა:

$$g = \sum_{s=0}^{m} a_{sm} g_s + h_{m+1},$$

სადაც $a_{sm} = 0, 1, ..., p_{s+1} - 1$, და $h_{m+1} \in U_{m+1}$. ადვილი დასანახია, რომ რადგან $g_n \in U_n$ და $g_n \notin U_{n+1}$ ამიტომ თუ $m < n$ მაშინ ყოველი $s = 0, 1, ..., m$-თვის $a_{sm} = a_{sn}$ რაც იმას ნიშნავს, რომ g-ს წარმოდგენაში a_{sm} რიცხვები არაა დამოკიდებული m-ზე. შესაბამისად a_{sm}-ის ნაცვლად ჩვენ დავწერთ a_s და გვექნება:

$$g = \sum_{s=0}^{m} a_s g_s + h_{m+1}.$$

ახლა, რადგან $\bigcap_{m=1}^{\infty} U_m = \{0\}$, და $\lim_{m\to\infty} h_{m+1} = 0$ ამიტომ მივიღებთ

$$g = \sum_{s=0}^{\infty} a_s g_s.$$

ესეიგი G ჯგუფის ნებისმიერი g ელემენტი შეიძლება წარმოდგეს ზემოთ მოყვანილი მწკრივის სახით. შებრუნებული დებულება გამომდინარეობს G ჯგუფის კომპაქტურობიდან ყოველი ზემოთ მოყვანილი სახის მწკრივი კრებადია G ჯგუფის რაიმე g ელემენტისაკენ.

3.2 ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფის მახასიათებლები

განსაზღვრება 3.12. *(ჯგუფის მახასიათებელი) ვთქვათ G არის ჯგუფი " $\cdot$ " ოპერაციით. თუ კომპლექსურ მნიშვნელობებიანი ფუნქცია $\chi : G \to \mathbb{C}$ G-ზე აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს*

- *$\chi(x \cdot y) = \chi(x)\chi(y)$ ყოველი $x, y \in G$-თვის,*
- *$\exists M > 0$ ისეთი, რომ $|\chi(x)| \leq M$, და $\chi(x) \neq 0$ ყოველი $x \in G$-თვის,*

მაშინ ვიტყვით, რომ χ არის G ***ჯგუფის მახასიათებელი****.*

G ჯგუფის χ მახასიათებელს აქვს შემდეგი თვისებები:

თეორემა 3.5. *ვთქვათ, $\chi : G \to \mathbb{C}$ არის G ჯგუფის მახასიათებელი მაშინ ის არის არანულოვანი ჰომომორფიზმი G ჯგუფიდან შემდეგ მულტიპლიკაციურ ჯგუფში*

$$\mathbb{T} = \{z = e^{2\pi i x} \in \mathbb{C} : 0 \leq x < 1\},$$

ეს ნიშნავს, რომ G ჯგუფის χ მახასიათებელს აქვს შემდეგი თვისებები

- *$\chi(x \cdot y) = \chi(x)\chi(y)$, ყოველი $x, y \in G$-თვის,*
- *$|\chi(x)| = 1$, ყოველი $x \in G$-თვის.*

ახლა მოვიყავნოთ ლოკალურად კომპაქტური აბელური ჯგუფის მახასიათბლის განსაზღვრება და ჩამოვაყალიბოთ რამდენიმე მასთან დაკავშირებული ძირითადი თვისება

განსაზღვრება 3.13. *ვთქვათ,* $(G, +)$ *არის ლოკალურად კომპაქტური აბელის ჯგუფი თუ* $\chi : G \to \mathbb{C}$ *აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებებს:*

- *ყოველი* $x_1, x_2 \in G$*-თვის* $\chi(x_1 + x_2) = \chi(x_1)\chi(x_2)$*,*
- *ყოველი* $x \in G$*-თვის* $|\chi(x)| = 1$*.*

მაშინ ვიტყვით, რომ χ *არის* G *ჯგუფის მახასიათებელი.*

თეორემა 3.5-დან გამომდინარე $\chi : G \to \mathbb{T}$, სადაც

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

და $\mathbb{T}$ არის ერთეულოვანი წრეწირი $\mathbb{C}$ კომპლექსურ სიბრტყეზე, უფრო მეტიც ის წარმოადგენს ჯგუფს გამრავლების ოპერაციის მიმართ.

განსაზღვრება 3.14. *ვთქვათ,* $(G, +)$ *არის ლოკალურად კომპაქტური აბელის ჯგუფი. შემოვიღოთ აღნიშვნა*

$$\Gamma_G = \{\chi : \chi \, \textit{არის} \, G \, \textit{ჯგუფის უწყვეტი მახასიათებელი}\},$$

შემოვიტანოთ Γ_G-ზე $\times$ ოპერაცია შემდეგნაირად

$$(\chi_1 \times \chi_2)(x) = \chi_1(x)\chi_2(x), \text{ ყოველი } \chi_1, \chi_2 \in \Gamma_G \text{ და ყოველი } x \in G.$$

სიმრატივისთვის " $\times$ " სიმბოლოს ნაცვლად გამოვიყენებთ " $\cdot$ " სიმბოლოს. ადვილი დასანახია, რომ Γ_G წარმოადგენს აბელის ჯგუფს $\times$ ოპერაციის მიმართ და მას G ჯგუფის **მახასიათებელთა ჯგუფი** ეწოდება ან G ჯგუფის **დუალური** ჯგუფი. ახლა ჩამოვაყალიბოთ პონტრიაგინის დუალობის კარგად ცნობილი თეორემა რომელიც გვაძლევს Γ_G ჯგუფის მნიშვნელოვან დახასიათებას.

თეორემა 3.6. *ვთქვათ* $(G, +)$ *არის ტოპოლოგიური აბელური ჯგუფი რომელიც ასევე არის ჰაუსდორფის. მაშინ სამართლიანია შემდეგი წინადადებები:*

- *თუ* G *არის კომპაქტური ჯგუფი, მაშინ* Γ_G *წარმოადგენს დისკრეტულ ჯგუფს, და თუ* G *არის დისკრეტული მაშინ* Γ_G *არის კომპაქტური.*
- *თუ* G *არის ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფი, მაშინ* Γ_G *არის ლოკალურად კომპაქტური, უფრო მეტიც* Γ_G *და* G *არიან ტოპოლოგიურად იზომორფულები, ეს ნიშნავს, რომ ლოკალურად კომპაქტური აბელური ჯგუფი რომელიც ამასთან ერთად არის ჰაუსდორფის თვით შეუღლებადია.*

4 სივრცეები ზომით

მოცემულ თავში მოკლედ მიმოვიხილავთ ზომად სივრცეებს და მოვიყვანთ მასთან დაკავშირებულ ძირითად თეორემებს.

ვთქვათ X არის არაცარიელი სიმრავლე. **ალგებრა** X-ზე ეს არის X-ის არაცარიელი ქვესიმრავლეთა ოჯახი $\mathcal{A}$ ისეთი, რომ ის ჩაკეტილია სასრული გაერთიანებებისა და დამატების მიმართ. სხვა სიტყვებით, თუ $E_1, ..., E_n \in \mathcal{A}$, მაშინ $\bigcup_1^n E_j \in \mathcal{A}$ და თუ $E \in \mathcal{A}$ მაშინ $E^c \in \mathcal{A}$. **σ-ალგებრა** ეს არის ალგებრა რომელიც ჩაკეტილია თვლადი გაერთიანებების მიმართ. ადვილი შესამჩნევია, რომ ალგებრა ჩაკეტილია სასრული თანაკვეთების მიმართ. უფრო მეტიც, თუ $\mathcal{A}$ არის ალგებრა მაშინ $\emptyset \in \mathcal{A}$ და $X \in \mathcal{A}$. ასევე მნიშვნელოვანია ვახსენოთ, რომ σ-ალგებრა ჩაკეტილია თვლადი თანაკვეთების მიმართ.

მაგალითები: ვთქვათ, X არის ნებისმიერი სიმრავლე, მაშინ $\mathcal{P}(X)$ და $\{\emptyset, X\}$ არის σ-ალგებრა. თუ X არის არათვლადი მაშინ

$$\mathcal{A} = \{E \subseteq X : E \text{ არის თვლადი ან } E^c \text{ არის თვლადი}\},$$

არის σ-ალგებრა, რომელსაც ეწოდება თვლადი და კო-თვლადი სიმრავლეების σ-ალგებრა. მარტივი დასანახია, რომ X-ზე σ-ალგებრების თანაკვეთა ასევე არის σ-ალგებრა. აქედან გამომდინარეობს, რომ ყოველი $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$-თვის არსებობს ერთადერთი უმცირესი σ-ალგებრა რომელიც მოიცავს $\mathcal{E}$-ს და რომელსაც აღვნიშნავთ $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ სიმბოლოთი. კერძოდ, ეს არის $\mathcal{E}$-ს მომცველი σ-ალგებრების თანაკვეთა. მოვიყავნოთ შემდეგი ძალიან მნიშვნელოვანი ლემა:

ლემა 4.1. *თუ $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$ მაშინ $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{F})$.*

ახლა მოვიყვანოთ ზომის განსაზღვრება.

ვთქვათ, X-ზე მოცემული გვაქვს $\mathcal{M}$ σ-ალგებრა. **ზომა** $\mathcal{M}$-ზე ან მარტივად X-ზე ეს არის ფუნქცია $\mu : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ ისეთი, რომ

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- თუ $\{E_j\}_1^\infty$ არის თანაუკვეთ სიმრავლეთა ოჯახი $\mathcal{M}$-დან, მაშინ $\mu(\bigcup_1^\infty E_j) = \sum_1^\infty \mu(E_j)$,

მეორე თვისებას ეწოდება თვლადად ადიციურიობა. საიდანაც გამომდინარეობს სასრულად ადიციურობა.

- თუ $E_1, ..., E_n$ არიან თანაუკვეთი სიმრავლეები $\mathcal{M}$-დან მაშინ $\mu(\bigcup_1^n E_j) = \sum_1^n \mu(E_j)$.

ფუნქცია μ რომელიც აკმაყოფილებს პირველ და მესამე თვისებას ეწოდება სასრულად **ადიციური ზომა**.

თუ X არის მოცემული სიმრავლე და $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ არის σ-ალგებრა, მაშინ $(X, \mathcal{M})$-ს ეწოდება **ზომადი სივრცე** და $\mathcal{M}$-ს სიმრავლეებს ეწოდება **ზომადი სიმრავლეები**. თუ μ არის ზომა $(X, \mathcal{M})$-ზე, მაშინ $(X, \mathcal{M}, \mu)$-ს ეწოდება სივრცე ზომით.

ვთქვათ, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ არის სივრცე ზომით. თუ $\mu(X) < \infty$ მაშინ μ-ს ეწოდება **სასრული ზომა**. თუ $X = \bigcup_1^\infty E_j$ სადაც $E_j \in \mathcal{M}$ და $\mu(E_j) < \infty$ ყოველი j-თვის მაშინ μ-ს ეწოდება **σ-სასრული**. თუ ყოველი $E \in \mathcal{M}$-თვის რომელისთვისაც $\mu(E) = \infty$ არსებობს $F \in \mathcal{M}$ ისეთი, რომ $F \subset E$ და $0 < \mu(F) < \infty$, მაშინ μ-ს ეწოდება **ნახევრად სასრული**.

ახლა მოვიყვანოთ, ზომის თეორიაში ერთ-ერთი მნიშვნელოვანი თეორემა

თეორემა 4.1. *ვთქვათ, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ არის სივრცე ზომით მაშინ*

- ***მონოტონურობა:*** *თუ $E, F \in \mathcal{M}$ და $E \subseteq F$, მაშინ $\mu(E) \leq \mu(F)$,*
- ***ნახევრად ადიციურობა:*** *თუ $\{E_j\}_1^\infty \subseteq \mathcal{M}$, მაშინ $\mu(\bigcup_1^\infty E_j) \leq \sum_1^\infty \mu(E_j)$,*
- ***ქვემოდან უწყვეტობა:*** *თუ $\{E_j\}_1^\infty \subseteq \mathcal{M}$ და $E_1 \subseteq E_2 \subseteq ...$, მაშინ $\mu(\bigcup_1^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$,*
- ***ზემოდან უწყვეტობა:*** *თუ $\{E_j\}_1^\infty \subseteq \mathcal{M}$ და $E_1 \supseteq E_2 \supseteq ...$, და $\mu(E_1) < \infty$, მაშინ $\mu(\bigcap_1^\infty E_j) = \lim_{j\to\infty} \mu(E_j)$.*

თუ $\mu(E) = 0$ და $F \subseteq E$, მაშინ $\mu(F) = 0$ მოცემული გამომდინარეობს მონოტონურობის ძალით თუ $F \in \mathcal{M}$ მაგრამ საზოგადოდ არ გამომდინარეობს რომ $F \in \mathcal{M}$. ზომა რომლის განსაზღვრის არე მოიცავს ყველა ნული ზომის ყველა ქვესიმრავლეს ეწოდება **სრული**.

ვთქვათ, X არის ტოპოლოგიური სივრცე. σ-ალგებრას რომელიც წარმოქმნილია X-ში ღია სიმრავლე ოჯახით ეწოდება **ბორელის σ-ალგებრა** და აღინიშნება $\mathcal{B}_X$ სიმბოლოთი და მის ელემენტებს ბორელის სიმრავლეები ეწოდება.

განსაზღვრება 4.1. ***ტოპოლოგიური სივრცე ზომით*** *ეს არის $(X, \mathcal{M}, \mu)$ სივრცე ზომით სადაც X არის ტოპოლოგიური სივრცე და $\mathcal{M}$ არის ბორელის σ-ალგებრა. ე.ი $\mathcal{M} = \mathcal{B}_X$.*

განსაზღვრება 4.2. *ვთქვათ, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ არის ტოპოლოგიური სივრცე ზომით. μ ზომას ეწოდება* ***ბორელის ზომა*** *მაშინ და მხოლოდ მაშინ როდესაც X არის ჰაუსდორფის.*

შენიშვნა 4.1. *მოცემულ განსაზღვრებაში იმიტომ მოვითხოვეთ დამატებით T_2 აქსიომა, რომ მოცემულ სამაგისტრო ნაშრომში შეხება გვექნება ჰაუსდორფის ტოპოლოგიურ სივრცეებთან.*

განსაზღვრება 4.3. *ვთქვათ, $(X, \mathcal{M}, \mu)$ არის ტოპოლოგიური სივრცე ზომით. ვიტყვით, რომ μ არის რეგულარული ან რეგულარული ბორელის ზომა მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა*

- *ყოველი $K \subset X$ კომპაქტისთვის, $\mu(K) < \infty$,*
- *ყოველი $A \in \mathcal{M}$-თვის, $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U$ ღიაა და $A \subset U\}$,*

- *ყოველი $U \in \mathcal{M}$ ღია სიმრავლისთვის, $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K$ კომპაქტია და $K \subset U\}$.*

მეორე თვისებას ეწოდება ზომის გარე რეგულარობა, ხოლო მესამეს - შიდა რეგულარობა.

განსაზღვრება 4.4. *ვთქვათ, $(G, +)$ არის ტოპოლოგიური ჯგუფი. მარცხენა ჰაარის ზომა (შესაბამისად მარჯვენა ჰაარის ზომა) G-ზე ეწოდება არანულოვან რეგულარულ ბორელის μ ზომას G-ზე რომლისთვისაც $\mu(g + A) = \mu(A)$ (შესაბამისად $\mu(A + g) = \mu(A)$) ყოველი $g \in G$-თვის და ყოველი ზომადი A სიმრავლისათვის G-დან.*

ისტორიულად ჰაარის ზომა პირველად წარმოდგენილი იყო ჰაარის მიერ [14] 1933 წელს. მან მოცემულ სტატიაში დაამტკიცა ჰაარის ზომის არსებობა ყოველი ლოკალურად კომპაქტურ ჯგუფისათვის, თვლადობის მეორე აქსიომით. მოცემული შედეგის განზოგადება ნებისმიერ ლოკალურად კომპაქტურ ჯგუფზე ეკუთვნის ვეილს [29], ამორჩევის აქსიომის გამოყენებით. ამორჩევის აქსიომის გამოყენების გარეშე დებულება დამტკიცებული იყო კარტანის [6] და ბრედონის [4] მიერ და გამარტივებული ვერსია ალფსენის მიერ [3]-ში.

თეორემა 4.2. *ვთქვათ $(G, +)$ არის ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფი. მაშინ არსებობს მარჯვენა ჰაარის ზომა G-ზე.*

ჰაარის ზომაზე საუბრისას აუცილებელია მითითებული იყოს ის მარჯვენაა თუ მარცხენა რადგან განვასხვავოთ რომელი გადატანის მიმართ არის ინვარიანტული. რადგან თუ ჯგუფი არაა აბელური მაშინ $g + A$ საზოგადოდ არ დაემთხვევა $A + g$-ს. თუმცა შეგვიძლია ვაჩვენოთ, რომ მოცემული ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფისთვის მარცხენა ჰაარის ზომის არსებობა ექვივალენტურია მარჯვენა ჰაარის ზომის არსებობის მოცემულ ჯგუფზე.

თეორემა 4.3. *ვთქვათ, $(G, +)$ არის ლოკალურად კომპაქტური ჯგუფი და μ და ν არის ორი მარჯვენა ჰაარის ზომა G-ზე. მაშინ არსებობს დადებითი ნამდვილი რიცხვი c ისეთი, რომ $\nu = c\mu$.*

მოცემული თეორემები გამოყენებული იყო ნეიმანის მიერ [20] რომელმაც მოცემული ზომის არსებობა გამოიყენა ჰილბერტის მეხუთე პრობლემის გადასაჭრელად კომპაქტური ჯგუფების შემთხვევაში. მოცემული თეორემებს პირდაპირი გამოყენება აქვს ინტეგრების თეორიაში და ფურიეს ანალზში.

5 $\mathbb{Z}_p$ და G_m ჯგუფები

5.1 ვილენკინის ჯგუფი

ვთქვათ, $m := \{m_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ არის დადებითი მთელი რიცხვების მიმდევრობა ისეთი, რომ $m_i \geq 2$, ყოველი $i \in \mathbb{N}$-თვის. $\mathbb{Z}_{m_k} := \{0, 1, ...m_k - 1\}$-ით აღვნიშნოთ ნაშთთა კლასი მოდულით m_k. განვსაზღვროთ G_m როგორც მოცემული $\mathbb{Z}_{m_k}$ ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლი, ე.ი

$$G_m = \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_k},$$

ანუ G_m ჯგუფის ელემენტებს აქვს სახე $x = (x_0, x_1, ..., x_n, ...), x_k \in \mathbb{Z}_{m_k}$. G_m-ზე ოპერაცია განისაზღვრება შემდეგნაირად

$$(a_0, a_1, ..., a_n, ...) + (b_0, b_1, ..., b_n, ...) = (a_0 \dot{+} b_0, a_1 \dot{+} b_1, ..., a_n \dot{+} b_n, ...),$$

სადაც

$$a_k \dot{+} b_k = (a_k + b_k) mod(m_k),$$

ტოპოლოგია G_m-ზე მოიცემა ერთმანეთში ჩალაგებული ქვეჯგუფების საშუალებით

$$I_0 = G, \quad I_k = \prod_{i=0}^{k-1} \{0\} \times \prod_{i=k}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}, \quad k = 1, 2, ...$$

ცხადია, გვაქვს ჩალაგება

$$G = I_0 \supset I_1 \supset ... \supset I_n \supset ... .$$

G_m ზემოთ მოყვანილი ტოპოლოგიით და შეკრების ოპერაციით წარმოადგენს კომპაქტურ აბელურ ტოპოლოგიურ ჯგუფს (იხ. [2]), რომელსაც **ვილენკინის ჯგუფი** ეწოდება. თუ m მიმდევრობა შემოსაზღვრულია, მაშინ G_m-ს ეწოდება **შემოსაზღვრული ვილენკინის ჯგუფი**, სხვა შემთხვევაში **შემოუსაზღვრელი**. ჩვენ მოცემულ სამაგისტრო ნაშრომში განვიხილავთ, მხოლოდ შემოსაზღვრულ ვილენკინის ჯგუფს. ადვილი დასანახია, რომ G_m არის ნულგანზომილებიანი. შემოვიღოთ აღნიშვნა $I_n(x) := x + I_n$ რომელიც წარმოადგენს $x \in G_m$ წერტილის მიდამოს. ცხადია,

$$I_n(x) := x + I_n = \{y \in G_m : x_i = y_i, 0 \leq i \leq n - 1\}.$$

განვსაზღვროთ, რიცხვთა განზოგადებული სისტემა m-ის საშუალებით შემდეგნაირად:

$$M_0 := 1, M_{k+1} := m_k M_k \ \ (k \in \mathbb{N}),$$

მაშინ ყოველი $n \in \mathbb{N}$ ერთადერთი გზით შეიძლება წარმოდგეს შემდეგი სახით:

$$n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j M_j, \ \ n_j \in Z_{m_j} (j \in \mathbb{N}_+),$$

და მხოლოდ სასრული რაოდებნობა n_j განსხვავდება ნულისაგან. ვთქვათ $n,k\in\mathbb{N}_+$ და

$$n=\sum_{j=0}^{\infty}n_jM_j,\quad k=\sum_{j=0}^{\infty}k_jM_j.$$

განვსაზღვროთ შემდეგი ოპერაცია

$$n\hat{+}k=\sum_{j=0}^{\infty}(n_j\dotplus k_j)M_j.$$

G_m-ში ღია სიმრავლეებით მოჭიმული ბორელის σ-ალგებრა აღვნიშნოთ $\mathcal{B}(G_m)$-ით. თეორემა 4.2-ის ძალით არსებობს ერთადერთი ჰაარის $\mu:\mathcal{B}(G_m)\to[0,\infty]$ ზომა G_m ისეთი, რომ $\mu(G_m)=1$. მარტივი საჩვენებელია, რომ $\mu(I_n(x))=1/M_n$ (იხ. [23]).

$L^p(G_m)$-ით სადაც $1\le p<\infty$ აღვნიშნოთ ისეთ $f:G_m\to\mathbb{C}$ ფუნქციათა ერთობლიობა, რომ f ზომადია $\mathcal{B}(G_m)$-ს მიმართ და

$$\|f\|_p^p=\int_{G_m}|f|^p\,d\mu<\infty.$$

$\|f\|_p$ განსაზღვრავს ნორმას $L^p(G_m), 1\le p<\infty$ სივრცეზე და მოცემული სივრცე ამ ნორმის მიმართ წარმოადგენს ბანახის სივრცეს.

ვილენკინის G_m ჯგუფს მჭიდრო კავშირი აქვს $[0,1)$ ინტერვალთან. $\mathbb{Q}^m$-ით აღვნიშნოთ რაციონალური რიცხვები რომელთაც აქვთ jM_n^{-1} ფორმა სადაც, $0\le p\le M_n-1$ რაიმე $j,n\in\mathbb{N}$-თვის. ნებისმიერი $x\in[0,1)$ შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_k}{M_{k+1}},\quad \text{სადაც}\quad x_k\in\mathbb{Z}_{m_k}. \tag{1}$$

ყოველი $x\in[0,1)\setminus\mathbb{Q}^m$-თვის მოცემული წარმოდგენა ერთადერთია. როცა $x\in\mathbb{Q}^m$ მაშინ ადგილი აქვს ორ წარმოდგენას. პირველი რომელშიც მხოლოდ სასრული რაოდენობა კოორდინატებისა განსხვავდება ნულისაგან და მეორე რომელშიც x-ის წარმოდგენაში ნულისგან განსხვავებული კოორდინატების რაოდენობა არაა სასრული. ჩვენ ზემოთ მოყვანილი წარმოდგენისთვის ვირჩევთ პირველს. G^0-ით აღვნიშნოთ ისეთი ელემენტები G_m-დან, რომელთა კოორდინატები ე.ი x_k-ები რაღაც ადგილიდან დაწყებული ნულის ტოლია. ახლა თუ ასეთი $x=(x_0,,,x_n\neq 0,0,0,...)\in G_m$ ელემენტისთვის განვიხილავთ

$$x^*=(x_0,...,x_n,m_{n+1}-1,m_{n+2}-1,...),$$

და ასეთი ტიპის ელემენტებს აღვნიშნავთ G_*^0 მაშინ ასახვა $\rho:[0,1)\to G_m$ განსაზღვრული ტოლობით

$$\rho(x)=(x_0,x_1,....),$$

სადაც x აქვს წარმოდგენა (1). მაშინ ρ არის ბიექცია $[0,1)$ ინტერვალსა და $G_m\setminus G_*^0$-ს შორის. მოცემულ საკითხთან დაკავშირებით მეტი ინფორმაციისთვის იხილეთ [23].

ახლა განვიხილოთ G_m-ზე ორთონორმირებული სისტემა რომელსაც ეწოდება **ვილენკინის სისტემა**. პირველ რიგში განვსაზღვროთ კომპლექსურ მნიშვნელობებიანი ფუნქიცა $r_k(x) : G_m \to \mathbb{C}$, რომელსაც რადემახერის განზოგადებული ფუნქცია ეწოდება შემდეგნაირად:

$$r_k(x) := \exp(2\pi i x_k/m_k), \quad \left(i^2 = -1, x \in G_m, k \in \mathbb{N}\right).$$

განვსაზღვროთ **ვილენკინის სისტემა** $\psi := (\psi_n : n \in \mathbb{N})$, G_m-ზე შემდეგნაირად:

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x), \quad \text{სადაც} \quad n = \sum_{j=0}^{\infty} n_j M_j.$$

როცა $m \equiv 2$. მაშინ მოცემულ სისტემას ჩვენ უოლშ-პელის სისტემა ეწოდება. კარგად არის ცნობილი, რომ ვილენკინის სისტემა წარმოადგენს ორთონორმირებულ სისტემას G_m ჯგუფზე. ვილენკინის ფუნქციებს აქვს შემდეგი თვისებები

თეორემა 5.1. *ვთქვათ, $n, k \in \mathbb{N}$ მაშინ*

$$\begin{aligned}
|\psi_n(x)| &= 1, \quad x \in G_m, \\
\psi_n(x+y) &= \psi_n(x)\psi_n(y), \quad x, y \in G_m, \\
\psi_n(-x) &= \overline{\psi}_n(x), \quad x \in G_m, \\
\psi_{n\hat{+}k}(x) &= \psi_n(x)\psi_k(x), \quad x, y \in G_m.
\end{aligned}$$

თეორემა 5.2. *ვილენკინის ფუნქციები წარმოადგენენ G_m ჯგუფის მახასიათებლებს და პირიქით G_m-ის ყოველ მახასიათებელს აქვს შემდეგი სახე:*

$$\psi_n(x) := \prod_{k=0}^{\infty} r_k^{n_k}(x), \quad (n \in \mathbb{N}).$$

ვთქვათ, $f \in L^1(G_m)$. განვსაზღვროთ f ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტი, ფურიეს მწკრივის n-ური კერძო ჯამი და დირიხლეს გული

$$\hat{f}(k) = \int_{G_m} f \bar{\psi}_k \, d\mu, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$S_n(f) = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k)\psi_k, \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

$$D_n = \sum_{k=0}^{n-1} \psi_k, \quad n \in \mathbb{N}_+.$$

5.2 $\mathbb{Z}_p$ ჯგუფი

ახლა ავაგოთ ნულგანზომილებიანი კომპაქტური ტოპოლოგიური აბელირი ჯგუფი, რომელიც განსხვავდება ციკლური ჯგუფების პირდაპირი ნამრავლისაგან. ვთქვათ p არის მარტივი რიცხვი

და $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$, სადაც $\mathbb{Q}$ რაციონალური რიცხვების სიმრავლე. ვთქვათ, x ისეთია, რომ სამართლია შემდეგი წარმოდგენა $x = p^{\gamma(x)}\frac{m}{n}$, სადაც $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ და $m, n \in \mathbb{Z}$ არცერთი არ იყოფა p-ზე, მაშინ $|x|_p := p^{-\gamma(x)}$. როცა $x = 0$ მაშინ $|0|_p = 0$. $|x|_p$ სიდიდეს აქვს მოდულის ყველა თვისება, ასევე ადგილი აქვს ტოლობას $|xy|_p = |x|_p|y|_p$. დამატებით $|\cdot|_p$-ს გააჩნია შემდეგი თვისება

$$|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p). \tag{2}$$

$\mathbb{Q}_p$ ველი განისაზღვრება როგორც $\mathbb{Q}$-ს გასრულება $|\cdot|_p$ ნორმის მიმართ. ყოველი $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, ერთადერთი გზით წარმოდგება შემდეგი სახით

$$x = p^{\gamma}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + ... + x_k p^k + ...), \tag{3}$$

სადაც $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$, და $0 \leq x_j \leq p-1, j \in \mathbb{Z}_+$, და $x_0 \neq 0$. (3) წარმოდგენიდან გვაქვს, რომ $|x|_p = p^{-\gamma}$. $\mathbb{Q}_p$ არის ველი და $|x|_p$ ველის მოდული $\mathbb{Q}_p$-ზე, რომლისთვისაც შესრულებულია (2). $x, y \in \mathbb{Q}_p$ ელემენტების შეკრება განისაზღვრება შემდეგნაირად, ვთქვათ

$$x = \sum_{k=\alpha}^{\infty} a_k p^k, \quad y = \sum_{k=\beta}^{\infty} b_k p^k,$$

მაშინ

$$x + y = \sum_{k=\gamma}^{\infty} c_k p^k, \quad \gamma = \min(\alpha, \beta),$$

სადაც

$$\sum_{k=\alpha}^{n} a_k p^k + \sum_{k=\gamma}^{n} b_k p^k = \sum_{k=\gamma}^{n} c_k p^k \,(mod\, p^{n+1}), \quad \forall n \geq \gamma.$$

$\mathbb{Q}_p$ ველი არის კომუტაციური ჯგუფი მოცემული შეკრების ოპერაციის მიმართ. ვთქვათ $B_k(x_0) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - x_0| \leq p^k\}$ და $S_k(x_0) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - x_0| = p^k\}$, $k \in \mathbb{Z}$. მაშინ $B_k = B_k(0)$ არის ღია და კომპაქტური ჯგუფი შეკრების მიმართ. $B_k = B_k(0)$ წარმოქმნის ნულის მიდამოთა ბაზას. B_k/B_{k+1} შეიცავს $B_{k+1}(a) = a + B_{k+1}$ ტიპის p ცალ ელემენტს. შემოვიღოთ აღნიშვნა $\mathbb{Z}_p := B_0$. $\mathbb{Z}_p$-ს ეწოდება p-ადიკურ მთელ რიცხვთა ჯგუფი. შევნიშნოთ, რომ B_k ქმნის ერთმანეთში ჩალაგებულ ქვეჯგუფთა მიმდევრობას. საიდანაც გამომდინარეობს, რომ $\mathbb{Z}_p$ არის ნულგანზომილებიანი ჯგუფი ზემოთ მოყვანილი ოპერაციის მიმართ. რადგან $\mathbb{Q}_p$ არის ლოკალურად კომპაქტური აბელური ჯგუფი (იხ. [2]) ამიტომ თეორემა 4.2-ის ძალით არსებობს ჰაარის ზომა μ ისეთი, რომ $\mu(B_0) = \mu(\mathbb{Z}_p) = 1$.

განვსაზღვროთ p-ადიკური $x \in \mathbb{Q}_p$-ის წილადი ნაწილი შემდეგნარიად

$$\{x\}_p = \begin{cases} 0, & \text{თუ} \quad \gamma \geq 0 \quad \text{ან} \quad x = 0; \\ \\ p^{\gamma} \sum_{j=0}^{|\gamma|-1} x_j p^j, & \text{თუ} \quad \gamma < 0. \end{cases}$$

შევნიშნოთ, რომ $n \in \mathbb{N}$, შეგვიძლია განვიხილოთ, როგორც $\mathbb{Q}_p$-ს ელემენტი. ვთქვათ, $n \in \mathbb{Z}$ აქვს შემდეგი წარმოდგენა

$$n = \sum_{j=0}^{\alpha(n)} n_j p^j.$$

განვიხილოთ ფუნქცია

$$u(n) = \sum_{j=0}^{\alpha(n)} n_j p^{-j-1},$$

$x \in \mathbb{Z}_p$-თვის განვსაზღვროთ

$$\psi_n(x) = \exp(2\pi i \{u(n)x\}_p), \tag{4}$$

(4) განსაზღვრებიდან ვხედავთ, რომ ადგილი აქვს შემდეგ ტოლობებს

$$\psi_n(x+y) = \psi_n(x)\psi_n(y), \quad \psi_n(x-y) = \psi_n(x)\overline{\psi_n(y)}, \quad n \in \mathbb{Z}_+, \quad x, y \in \mathbb{Z}_p,$$

და $|\psi_n(x)| = 1$. ასევე ψ_n ყოველი $n \in \mathbb{Z}_+$-თვის არის უწყვეტი $\mathbb{Z}_p$-ზე. რაც იმას ნიშნავს, რომ ψ_n-ები არიან $\mathbb{Z}_p$ ჯგუფის მახასიათებლები. უფრო მეტიც $\mathbb{Z}_p$ ჯგუფის ნებისმიერ მახასიათებელს აქვს (4) სახე. ცნობილია, რომ $\{\psi_n\}_{n=0}^{\infty}$ არის ორთონორმირებული სისტემა $\mathbb{Z}_p$-ზე.

მოცემულ შემთხვევაშიც განისაზღვრება რადემახერის ფუნქციის ანალოგები შემდეგნაირად $\varphi_n(x) = \exp(2\pi i \{p^{-n}x\}_p)$, $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_0(x) \equiv 0$. მაშინ (4) შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი სახით $\psi_n(x) = \prod_{j=0}^{\alpha(n)} \varphi_{j+1}^{n_j}(x)$. აღვნიშნოთ ასევე რადემახერის ფუნქციების ძალიან მნიშვნელოვანი თვისება, რომელსაც ადგილი არ აქვს ვილენკინის სისტემის შემთხვევაში, მდგომარეობს შემდეგში $\varphi_n^p = \varphi_{n-1}(x)$. მოცემული სისტემის ძირითადი თვისებები შესწავლილია [11]-ში. მოცემული სისტემის მიმართ ანალოგიურად განისაზღვრება $f \in L^1(\mathbb{Z}_p)$ ფუნქციის ფურიეს კოეფიციენტები, ფურიეს მწკრივის n-ური რიგის კერძო ჯამი და დირიხლეს გული.

6 $L^p_\omega(G_m)$, $L^{p(\cdot)}(G_m)$ სივრცეები და ვილენკინის სისტემა

ვთქვათ, $\{m_i\}$ მიმდევრობა შემოსაზღვრულია. ვატარიმ [19] აჩვენა, რომ თუ $f \in L^p(G_m), 1 < p < \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_{G_m} |S_n f - f|^p \, d\mu = 0.$$

იუნგმა [31], შიფმა [25] და საიმონმა [26] დამოუკიდებლად აჩვენეს, რომ ვილენკინ-ფურიეს მწკრივის n-ური რიგის კერძო ჯამები ნორმით კრებადია მაშინაც კი როდესაც $\{m_i\}$ მიმდევრობა შემოუსაზღვრელია.

$\{I_k\}$ იყოს G_m ჯგუფის ქვეჯგუფთა შემდეგი მიმდევრობა:

$$I_0 = G_m, \quad I_k = \prod_{i=0}^{k-1}\{0\} \times \prod_{i=k}^{\infty} \mathbb{Z}_{m_i}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

$[0,1]$ ინტერვალზე I_k ქვეჯგუფის მოსაზღვრე კლასებს აქვს შემდეგი სახე $[jM_k^{-1}, (j+1)M_k^{-1}]$, $j = 0, 1, ..., M_k - 1$. $\mathcal{F}$-ით აღვნიშნოთ განზოგადებული ინტერვალების სიმრავლე. მოცემული სიმრავლე შედგება $[0, jM_{k+1}^{-1}]$, $k = 0, 1, ...,$ $j = 1, ..., m_k$. ინტერვალების ყველა შესაძლო გადატანებისაგან. შევნიშნოთ, რომ $I \in \mathcal{F}$

- თუ რაიმე $x \in G_m$ და k-თვის, $I \subset I_k(x)$,
- I არის I_{k+1} მოსაზღვრე კლასების გაერთიანება,
- თუ განვიხილავთ $I_k(x)$ როგორც წრეწირს და I არის ინტერვალი.

შემოვიღოთ აღნიშვნა $\mathcal{F}_{-1} = \{G_m\}$. $\mathcal{F}_k, k = 0, 1, ...$ იყოს ყველა $I \in \mathcal{F}$ ისეთი, რომ I არის I_k-ს მოსაზღვრე კლასების საკუთრივი ქვესიმრავლე ან და I არის I_{k+1}-ს მოსაზღვრე კლასების გაერთიანება. $\mathcal{F}_k$ სიმრავლეები თანაუკვეთია და $\mathcal{F} = \bigcup_{k=-1}^{\infty} \mathcal{F}_k$.

ვთქვათ, $I \in \mathcal{F}$, განვსაზღვროთ $3I \in \mathcal{F}$ შემდეგნაირად: თუ $I = G_m$ მაშინ $3I = G_m$. თუ $I \in \mathcal{F}_k, k = 0, 1, ...$ მაშინ არსებობს $x \in G_m$ ისეთი, რომ $I \subset I_k(x)$. თუ $\mu(I) \geq \frac{\mu(I_k)}{3}$, მაშინ $3I = I_k(x)$ და თუ $\mu(I) < \frac{\mu(I_k)}{3}$, მაშინ განვიხილოთ $I_k(x)$ როგორც წრეწირი, მაშინ I არის ამ წრეწირზე ინტერვალი. $3I \in \mathcal{F}_k$ იყოს ინტერვალი ამ წრეწირზე რომელიც შეიცავს I-ს მის ცენტრში და აქვს ზომა $\mu(3I) = 3\mu(I)$. ყველა შემთხვევაში თუ $I \in \mathcal{F}$, $\mu(3I) \leq 3\mu(I)$.

ვიტყვით, რომ ω არის წონა G_m-ზე თუ ω არის ზომადი და $0 < \omega(x) < \infty$ თითქმის ყველგან. $L^p_\omega(G_m), 1 \leq p < \infty$-თი აღვნიშნოთ ყველა $f : G_m \to \mathbb{C}$ ზომად ფუნქციათა ერთობლიობა G_m-ზე, რომელთათვისაც

$$\|f\|_{p,\omega} = \left(\int_G |f|^p \omega \, d\mu\right)^{1/p} < \infty,$$

მოცემული სივრცე წარმოადგენს ბანახის სივრცეს $\|f\|_{p,\omega}$ ნორმით.

განსაზღვრება 6.1. (i) *ვიტყვით, რომ ω აკმაყოფილებს $A_p(G_m)$ პირობას, $1 < p < \infty$, თუ*

$$[\omega]_{A_p} = \sup_{i\in\mathcal{F}} \left(\frac{1}{\mu(I)}\int_I \omega\, d\mu\right)\left(\frac{1}{\mu(I)}\int_I \omega^{-1/(p-1)}\, d\mu\right)^{p-1} < \infty. \tag{5}$$

(ii) *იტყვით, რომ ω აკმაყოფილებს $A_1(G_m)$ პირობას თუ*

$$[\omega]_{A_1} = \sup_{i\in\mathcal{F}} \frac{1}{\mu(I)}\int_I \omega\, d\mu(\operatorname*{essinf}_I \omega(x))^{-1} < \infty.$$

როცა $\omega(x) = 1, x \in G_m$, მაშინ ვიღებთ კლასიკურ $L^p(G_m)$ ლებეგის სივრცეს. მარტივი დასანახია, რომ, თუ $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p(G_m)$ მაშინ $L^p_\omega(G_m) \subset L^1(G_m)$. ვთქვათ, $\omega \in A_p(G_m), 1 \leq p < \infty$, და $p < q < \infty$ მაშინ $\omega \in A_q(G_m)$.

გოსელინმა [13] (როცა $\sup_i m_i < \infty$) და იუნგმა [30] ($\{m_i\}$-ზე შეზღუდვის გარეშე) დაახასიათეს ყველა ω წონა ისეთი, რომ თუ $f \in L^p_\omega(G_m), 1 < p < \infty$, მაშინ $S_n f$ კრებადია f-სკენ $L^p_\omega(G_m)$-ში. იმ შემთხვევაში როდესაც $\sup_i m_i < \infty$ გოსელინმა [13] განსაზღვრა $A_p(G_m)$ პირობა როგორც (5) პირობა, სადაც (5) სრულდება ყოველი I-თვის რომელიც წარმოადგენს I_k, $k = 0, 1, ...$-ს მოსაზღვრე კლასებს. ამ შემთხვევაში A_p პირობა იუნგის და გოსელინის შემთხვევაში ექვივალენტურია ([30]).

თეორემა 6.1. *[30] ვთქვათ, ω არის წონა G_m-ზე. მაშინ $1 < p < \infty$,-თვის შემდეგი წინადადებები ერთმანეთის ექვივალენტურია:*

(i) $\omega \in A_p(G_m)$;

(ii) *არსებობს მუდმივი C, დამოკიდებული მხოლოდ ω-ზე და p-ზე, ისეთი, რომ ყოველი $f \in L^p_\omega(G_m)$-თვის გვაქვს*

$$\int_{G_m} |S_n f|^p\, \omega\, d\mu \leq C \int_{G_m} |f|^p\, \omega\, d\mu;$$

(iii) *ყოველი $f \in L^p_\omega(G_m)$-თვის გვაქვს*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{G_m} |S_n f - f|^p\, \omega\, d\mu = 0.$$

მოვიყვანოთ ცვლად მაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცის განსაზღვრება. ვთქვათ, $p(\cdot) : G_m \to [1, \infty)$ არის ზომადი ფუნქცია. ცვლად მაჩვენებლიანი $L^{p(\cdot)}(G_m)$ ლებეგის სივრცე არის ყველა ზომადი ფუნქციების ერთობლიობა ისეთი, რომ რაიმე $\lambda > 0$-თვის

$$\rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) = \int_{G_m} (|f(x)|/\lambda)^{p(x)}\, d\mu < \infty.$$

$L^{p(\cdot)}(G_m)$ წარმოადგენს ბანახის სივრცეს ლუქსემბურგის ნორმით

$$\|f\|_{p(\cdot)} = \inf\{\lambda > 0 : \rho_{p(\cdot)}(f/\lambda) \leq 1\}.$$

შემოვიღოთ აღნიშვნები: $p_-(I) = \operatorname{essinf}_{x\in I} p(x)$ და $p_+(I) = \operatorname{esssup}_{x\in I} p(x)$, სადაც $I \subset G_m$. თუ $I = G_m$ მაშინ სიმარტივისთვის გამოვიყენებთ აღნიშვნებს p_-, p_+. $p'(\cdot)$ აღნიშნავს $p(\cdot)$ ფუნქციის შეუღლებულ ფუნქციას ე.ი $1/p(x) + 1/p'(x) = 1\,(x \in G_m)$. მოცემულ ნაშრომში C, c აღნიშნავს აბსოლუტურ მუდმივებს და შეიძლება განსხვავდებოდეს კონტექსტის მიხედვით, χ_A აღნიშნავს A სიმრავლის მახასიათებელ ფუნქციას.

უოლშ-ფურიეს მწკრივის კრებადობა $L^{p(\cdot)}([0,1))$ სივრცეში შესწავლილი იყო ჟიაოს მიერ [15]. C_d^{log}-ით აღვნიშნოთ ყველა $p(\cdot) : [0,1) \to [1,\infty)$, ფუნქციების ერთობლიობა რომლისთვისაც არსებობს დადებითი მუდმივი C ისეთი, რომ

$$|I|^{p_- - p_+} \leq C,$$

ყოველი ორობითი $I = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n})\,(k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k < 2^n)$, სადაც $|I|$ აღნიშნავს I ინტერვალის ლებეგის ზომას. შევნიშნოთ, რომ მოცემული პირობა შეიძლება ინტერპრეტირებული იყოს როგორც log-ჰელდერის უწყვეტობის პირობის ორობითი ვერსია $p(\cdot)$-ზე. log-ჰელდერის პირობა ძალზე მნიშვნელოვანი პირობაა $L^{p(\cdot)}(\mathbb{R}^n)$ სივრცეში ჰარმონიული ანალიზის სხვადასხვა პრობლემების გადასაჭრელად. (იხ. [8]).

თეორემა 6.2. *[15]. ვთქვათ $p(\cdot) \in C_d^{log}$, და $1 < p_- \leq p_+ < \infty$. თუ $f \in L^{p(\cdot)}([0,1))$ მაშინ f ფუნქციის უოლშ-ფურიეს მწკრივის $S_n f$ კერძო ჯამებისთვის გვაქვს*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n f\|_{p(\cdot)} \leq C \|f\|_{p(\cdot)}.$$

რადგან უოლშის პოლინომები მკვრივია $L^{p(\cdot)}([0,1))$-ში ზემოთ მოყვანილი თეორემიდან გამომდინარეობს, რომ $S_n f$ კრებადია საწყისი f ფუნქციისკენ $L^{p(\cdot)}([0,1))$-ის ნორმით. (იხ.[15], [23]).

ზოგადად იმისთვის, რომ მუდმივი მაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეების ანალოგიური თვისებები შესწავლილი იყოს ცვლად მაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში, ამისათვის ცენტრალური პრობლემაა განისაზღვროს პირობები $p(\cdot)$ მაჩვენებელზე რომელიც უზრუნველყოფს ჰარდი-ლითელვუდის მაქსიმალური ოპერატორის შემოსაზღვრულობას $L^{p(\cdot)}$-ზე. (იხილეთ, მონოგრაფიები [8], [10]). განვსაზღვროთ ჰარდი-ლითელვუდის მაქსიმალური ფუნქიცა რომელიც არსებითია ვილენკინ-ფურიეს მწკრივების შესწავლისთვის. ვთქვათ, $f \in L^1(G)$ და განვიხილოთ

$$Mf(x) = \sup_{x\in I, I\in\mathcal{F}} \frac{1}{\mu(I)} \int_I |f|\, d\mu.$$

მოცემული მაქსიმალური ფუნქცია პირველად შემოღებული იყო პ. სიმონის მიერ [27]-ში. მან აჩვენა, რომ მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია $L^p(G), 1 < p < \infty$ და მისი სუსტი $(1,1)$ ტიპი. იუნგმა [30]-ში მიიღო მაკენჰაუპტის თეორემის ანალოგი [19].

თეორემა 6.3. *ვთქვათ, ω არის წონა G_m-ზე და $1 < p < \infty$, მაშინ შემდეგი წინადადებები ერთმანეთის ექვივალენტურია:*

(i) $\omega \in A_p(G_m)$,

(ii) არსებობს მუდმივი C დამოკიდებული მხოლოდ ω-ზე და p-ზე ისეთი, რომ ყოველი $f \in L^p_\omega(G_m)$-თვის გვაქვს

$$\int_{G_m} (Mf)^p \omega \, d\mu \leq C \int_{G_m} |f|^p \, \omega \, d\mu.$$

როცა $p = 1$, მაშინ შემდეგი ორი წინადადება ერთმანეთის ექვივალენტურია:

(iii) $\omega \in A_1(G_m)$,

(iv) არსებობს მუდმივი C დამოკიდებული მხოლოდ ω-ზე ისეთი, რომ ყოველი $f \in L^1(G_m)$-თვის გვაქვს

$$\int_{\{Mf > y\}} \omega \, d\mu \leq C y^{-1} \int_{G_m} |f| \, \omega \, d\mu, \; y > 0.$$

განსაზღვრება 6.2. *ვიტყვით, რომ $p(\cdot)$ მაჩვენებელი, $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ აკმაყოფილებს $\mathscr{A}(G_m)$ პირობას, თუ არსებობს მუდმივი C ისეთი, რომ ყოველი $I \in \mathcal{F}$-თვის,*

$$\frac{1}{\mu(I)} \|\chi_I\|_{p(\cdot)} \|\chi_I\|_{p'(\cdot)} \leq C. \tag{6}$$

(6) პირობა თამაშობს ზუსტად იგივე როლს გასაშუალოების ოპერატორებისთვის ცვლად მაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში როგორსაც A_p პირობა წონიან ლებეგის სივრცეებში (იხილეთ [16], [18]). კოპალიანმა და ადამაძემ [1], აჩვენეს, რომ $\mathscr{A}(G_m)$ პირობა არის აუცილებელი და საკმარისი იმისათვის, რომ ჰარდი-ლითელვუდის მაქსიმალური ფუნქცია იყოს შემოსაზღვრული $L^{p(\cdot)}(G_m)$-ზე. კერძოდ მათ დაამტკიცეს შემდეგი

თეორემა 6.4. *[1]. ვთქვათ, $p(\cdot)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას $1 < p_- \leq p_+ < \infty$. მაშინ შემდეგი ორი წინადადება ერთმანეთის ექვივალენტურია:*

(i) $p(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m)$,

(ii) არსებობს მუდმივი C, დამოკიდებული მხოლოდ $p(\cdot)$-ზე, ისეთი, რომ ყოველი $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$-თვის გვაქვს

$$\|Mf\|_{p(\cdot)} \leq C \|f\|_{p(\cdot)}.$$

განსაზღვრების სიმეტრიულობიდან გამომდინარე, $p(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა $p'(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m)$ და ზემოთ მოყვანილი თეორემიდან გამომდინარე მიუხედავად იმისა, რომ M არ არის წრფივი ოპერატორი, M ოპერატორის შემოსაზღვრულობიდან გამომდინარეობს დუალური უტოლობა.

შედეგი 6.1. *[1]. ვთქვათ, $p(\cdot)$ მოცემული მაჩვენებელია ისეთი, რომ $1 < p_- \leq p_+ < \infty$ მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი M შემოსაზღვრულია $L^{p(\cdot)}(G_m)$-ზე მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა M შემოსაზღვრულია $L^{p'(\cdot)}(G_m)$.*

[1]-ში დამტკიცებულია შემდეგი თეორემა G_m ჯგუფის ტერმინებში (ევკლიდური სივრცის შემთხვევაში იხილეთ [8]).

თეორემა 6.5. *[1]. ვთქვათ, $p(\cdot)$ არის მაჩვენებელი ისეთი, რომ $1 < p_- \leq p_+ < \infty$. მაშინ შემდეგი წინადადებები ერთმანეთის ექვივალენტურია:*

(i) მაქსიმალური ოპერატორი M შემოსაზღვრულია $L^{p(\cdot)}(G_m)$-ში,

(ii) არსებობს $r_0, 0 < r_0 < 1$, ისეთი, რომ თუ $r_0 < r < 1$, მაშინ მაქსიმალური ფუნქცია შემოსაზღვრულია $L^{rp(\cdot)}(G_m)$.

$\mathscr{S}$ სიმბოლოთი აღვნიშნავთ ორი არაუარყოფითი ზომად ფუნქციათა წყვილთა ერთობლიობას. ვთქვათ, $p, 1 \leq p < \infty$ და თუ რაიმე $\omega \in A_p(G_m)$ დავწერთ უტოლობას

$$\int_{G_m} f(x)^p \omega(x)\, d\mu \leq C \int_{G_m} g(x)^p \omega(x)\, d\mu, \quad (f,g) \in \mathscr{S},$$

მაშინ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ მოცემული უტოლობა სრულდება ყოველი $(f,g) \in \mathscr{S}$ წყვილისთვის, ისე რომ უტოლობის მარცხენა მხარე სასრულია, და C მუდმივი შეიძლება დამოკიდებული იყოს p-ზე და $[w]_{A_p}$. თუ ჩვენ დავწერთ

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq C_{p(\cdot)} \|g\|_{p(\cdot)}, \quad (f,g) \in \mathscr{S},$$

მაშინ ჩვენ ვგულისხმობთ, რომ მოცემული უტოლობა სრულდება ყველა $(f,g) \in \mathscr{S}$ წყვილისთვის, ისე რომ მოცემული უტოლობის მარცხენა მხარე სასრულია და მუდმივი შეიძლება დამოკიდებული იყოს $p(\cdot)$.

მოცემული შეთანხმების საფუძველზე უკვე შეგვიძლია ჩამოვაყალიბოთ რუბიო დე ფრანსიას ექსტრაპოლაციის თეორემა შემდეგი ფორმით:

თეორემა 6.6. *ვთქვათ, რაიმე $p_0 \geq 1$ და $\mathscr{S}$ არის ისეთი, ოჯახი, რომ ყოველი $\omega \in A_1(G)$-თვის გვაქვს*

$$\int_{G_m} f(x)^{p_0} \omega(x)\, d\mu \leq C \int_{G_m} g(x)^{p_0} \omega(x)\, d\mu, \quad (f,g) \in \mathscr{S}.$$

თუ $p(\cdot)$ მაჩვენებელი ისეთია, რომ $p_0 < p_- \leq p_+ < \infty$ და მაქსიმალური ოპერატორი M შემოსაზღვრულია $L^{(p(\cdot)/p_0)'}(G_m)$, მაშინ

$$\|f\|_{p(\cdot)} \leq C_{p(\cdot)} \|g\|_{p(\cdot)}, \quad (f,g) \in \mathscr{S}.$$

მოცემული თეორემა ცვლად მაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეში $\mathbb{R}^n$-ზე და როცა M მაქსიმალური ფუნქცია განსაზღვრულია კუბებზე (ბირთვებზე) $\mathbb{R}^n$-ში (რომელიც პარალელურია კოორდინატთა ღერძების მიმართ) პირველად დამტკიცებული იყო [7]-ში. [9]-ში რუბიო დე ფრანსიას

ექსტრაპოლაციის თეორემა დამტკიცებულია უფრო ზოგადი სივრცეებისთვის რომელშიც გამოყენებულია A_1 წონები და მაქსიმალური ოპერატორი M განსაზღვრული ნებისმიერი მაკენჰაუპტის ბაზისით (იხილეთ განსაზღვრება 3.1 [9]-ში). თეორემა 6.3-დან გამომდინარეობს, რომ განზოგადებულ ინტერვალთა $\mathscr{F}$ ოჯახი არის მაკენჰაუპტის ბაზისი. შემდეგი ტოლობის ძალით $\left(L^{p(\cdot)}(G_m)\right)^{1/p_0} = L^{p(\cdot)/p_0}(G_m)$ თეორემა 6.6 პირდაპირ გამომდინარეობს თეორემა 4.6-დან [9].

[1]-ში კოპალიანმა და ადამაძემ დაახასათეს ყველა ყველა $p(\cdot)$ მაჩვენებელი ისეთი, რომ თუ $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$, მაშინ $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ ფუნქციის ვილენკინ-ფურიეს მწკრივის $S_n f$ კერძო ჯამები კრებადია f-სკენ $L^{p(\cdot)}(G_m)$-ის ნორმით. კერძოდ სამართლიანია შემდეგი თეორემა

თეორემა 6.7. *ვთქვათ, $p(\cdot)$ მაჩვენებელი ისეთია, რომ $1 < p_- \leq p_+ < \infty$. მაშინ შემდეგი წინადადებები ექვივალენტურია:*

(i) $p(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m)$,

(ii) არსებობს მუდმივი C დამოკიდებული მხოლოდ $p(\cdot)$-ზე ისეთი, რომ ყოველი $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$-თვის გვაქვს:

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|S_n f\|_{p(\cdot)} \leq C\|f\|_{p(\cdot)},$$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \|f - S_n f\|_{p(\cdot)} = 0$, *ყოველი $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$-თვის.*

შემოვიღოთ აღნიშვნა

$$E_n(f)_{p,\omega} = \inf\left\{\left\|f - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\psi_k\right\|_{p,\omega} : a_k \in \mathbb{C}\right\}, n \in \mathbb{N}.$$

ცვლად მაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცის შემთხვევაში განვიხილოთ

$$E_n(f)_{p(\cdot)} = \inf\left\{\left\|f - \sum_{k=0}^{n-1} a_k\psi_k\right\|_{p(\cdot)} : a_k \in \mathbb{C}\right\}, n \in \mathbb{N}.$$

თეორემა 6.7-დან გამომდინარეობს შემდეგი უტოლობა $\|f - S_n f\|_{p(\cdot)} \leq (1 + C)E_n(f)_{p(\cdot)}$ თეორემა 6.7 თამაშობს ძირითად როლს მოცემულ სამაგისტო ნაშრომში. მოცემული თეორემის გამოყენებით განზოგადებულია ვოლოსივეცის [28] თეორემები ცვლად მაჩვენევლიან ლებეგის სივრცეებში.

ვთქვათ, G არის უოლშის (კანტორის) ჯგუფი. $X(G) \subset L^1(G)$ იყოს ბანახის სივრცე ისეთი, რომ უოლშის სისტემის წრფივი გარსი მკვრივია $X(G)$-ში. ბუცერმა და ვაგნერმა [5]-ში შემოიღეს $f \in X(G)$ ფუნქციის $D^{(1)}(f)$ ძლიერი წარმოებული. შემოვიღოთ აღნიშვნა $e_j = (x_0, x_1, ...), x_j = 1, x_i = 0$, როცა $i \neq j$.

განსაზღვრება 6.3. *ვთქვათ, $f \in X(G)$. ვიტყვით, რომ f-ს გააჩნია ძლიერი წარმოებული, თუ არსებობს $g \in X(G)$ ფუნქცია ისეთი, რომ*

$$\lim_{n\to\infty} \left\|2^{-1} \sum_{j=0}^{n} 2^j [f(\cdot) - f(\cdot + e_{j+1})] - g(\cdot)\right\|_X = 0,$$

ასეთ g ფუნქციას ეწოდება f ფუნქციის ორობითი ძლიერი წარმოებული და მას აღვნიშნავთ $D_X^{(1)}(f)$-ით. უფრო მეტიც განვსაზღვროთ მაღალი რიგის წარმოებულები

$$D_X^{(r)}(f) = D_X^{(1)}(D_X^{(r-1)}(f)), \quad r \in \mathbb{N}, \quad r \geq 2.$$

[5]-ში დამტკიცებულია შემდეგი ტოლობა $D_X^{(1)}(\psi_k) = k\psi_k, k \in \mathbb{N}_+$ საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ψ_k წარმოადგენს $D_X^{(1)}$ ოპერატორის საკუთრივ ფუნქციას. იგივე სტატიაში განსაზღვრულია $f \in X(G)$ ფუნქციის ძლიერი რიგის ინტეგრალი $I^{(r)}(f)$ შემდეგნაირად: შემოვიღოთ აღნიშვნა $W_r = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} k^{-r}\psi_k$. მაშინ $f * W_r$-ს ეწოდება f ფუნქციის r-რიგის ორობითი ინტეგრალი. ასევე [**?**]-ში დამტკიცებულია შემდეგი ფორმულების სამართლიანობა $D_X^{(1)}(I_X^{(1)}(f)) = f$ და $I_X^{(1)}(D_X^{(1)}(f)) = f$, როცა ფრჩხილებს შიგნით მოთავსებული გამოსახულება არსებობს და $\hat{f}(0) = 0$.

ონევიერმა [21]-ში ზემოთ მოყვანილი წარმოებულის განსაზღვრება განაზოგადა ვილენკინის ჯგუფებზე.

განსაზღვრება 6.4. *ვთქვათ $f \in X(G_m)$ და არსებობს ფუნქცია $g \in X(G_m)$ ისეთი, რომ*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n} m_j \sum_{k=0}^{M_{j+1}-1} kM_{j+1}^{-1} \sum_{l=0}^{M_{j+1}-1} \exp^{-lk}(2\pi i/M_{j+1})(f(\cdot + le_{j+1}) - f(\cdot)) - g(\cdot) \right\|_X = 0,$$

მაშინ g-ს ეწოდება f ფუნქციის ძლიერი წარმოებული $X(G_m)$-ში.

[21]-ში დამტკიცებულია ტოლობა $D^{(1)}(\psi_k) = k\psi_k$ და შესწავლილია წარმოებულის გარკვეული თვისებები. ონევიერმა [22]-ში შემოიღო მოდიფიცირებული ორობითი წარმოებული $f^{[1]}$ შემდეგი თვისებით: $\psi_k^{[1]} = 2^{[\log_2 k]}\psi_k$. ასევე მან აჩვენა, რომ $D^{(1)}$ და $D^{[1]}$ ოპერატორის განსაზღვრის არეები ემთხვევა.

ზელინმა [32]-ში შემოგვთავაზა P - წარმოებულისა და ინტეგრალის განსაზღვრება , რომელიც უფრო მარტივია ვიდრე ბუცერ-ვაგნერისა და ონევიერის განასზღვრებები.

განსაზღვრება 6.5. *ვთქვათ, $f \in X(G_m), \alpha \in \mathbb{R}, T_r^{\alpha} = \sum_{k=0}^{M_r-1} k^{\alpha}\psi_k$, სადაც $0^{\alpha} = 1$, როცა $\alpha \leq 0$. თუ*

$$\lim_{r\to\infty} \|T_r^{\alpha} * f - g\|_X = 0,$$

მაშინ $\alpha > 0$-თვის $g = T_X^{(\alpha)}(f)$-ს ეწოდება f ფუნქციის α რიგის (ძლიერი) წარმოებული და $\alpha < 0$-თვის $g = T_X^{(\alpha)}(f)$-ს ეწოდება f ფუნქციის $|\alpha|$ რიგის (ძლიერი) ინტეგრალი. ახლა რადგან

$$S_{M_n}(f)(x) = \frac{1}{|I_n(x)|} \int_{I_n(x)} f(t)\, d\mu,$$

$X(G_m) = L^p(G_m), 1 < p < \infty$. შემთხვევაში გვაქვს: $f \in L^p(G_m)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $\|S_{M_n}(f)\|_p \leq C$. სადაც C არაა დამოკიდებული n-ზე. შესაბამისად f ფუნქციის α რიგის

წარმოებულის არსებობა ექვივალენტურია იმის, რომ $\sum_{k=0}^{\infty} k^{\alpha} \hat{f}(k)\psi_k$ მწკრივი წარმოადგენს $g \in L^p(G_m)$ ფუნქციის ვილენკინ-ფურიეს მწკრივს. მოცემული სამაგისრო ნაშრომი შეეხება ზელინის მიერ შემოღებულ წარმოებულს, რომელიც აღნიშნული იქნება $f^{[r]}$-ით.

7 ძირითადი შედეგები

ვოლოსივეცმა [28]-ში დაამტკიცა შემდეგი თეორემა

თეორემა 7.1. *ვთქვათ, $f \in L^1(G_m)$ და*

$$Q(f) = \left(|\hat{f}(0)|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |S_{M_{n+1}}(f) - S_{M_n}(f)|^2 \right)^{1/2}, \quad \omega \in A_p(G_m),\, 1 < p < \infty.$$

მაშინ $f \in L^p_\omega(G_m)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Q(f) \in L^p_\omega(G_m)$, და $\|Q(f)\|_p \asymp \|f\|_p, f \in L^p_\omega(G_m)$.

მოცემულ თეორემაზე დაყრდნობით ვამტკიცებთ შემდეგ თეორემას

თეორემა 7.2. *ვთქვათ, $f \in L^1(G_m)$ და $p(\cdot)$ მაჩვენებელი ისეთია, რომ $1 < p_- \le p_+ < \infty$, და M მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია $L^{p(\cdot)}(G_m)$-ში, ამასთან*

$$Q(f) = \left(|\hat{f}(0)|^2 + \sum_{n=0}^{\infty} |S_{M_{n+1}}(f) - S_{M_n}(f)|^2 \right)^{1/2},$$

მაშინ $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $Q(f) \in L^{p(\cdot)}(G_m)$, და $\|Q(f)\|_{p(\cdot)} \asymp \|f\|_{p(\cdot)}, f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$.

დამტკიცება. მოცემული თეორემის პირობის და თეორემა 6.5-ის ძალით შეგვიძლია ავარჩიოთ $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ $(1+\varepsilon) < p_- \le p_+ < \infty$ და M მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია $L^{p(\cdot)/(1+\varepsilon)}(G_m)$-ში. ვთქვათ, $\omega \in A_1(G_m)$ მაშინ $\omega \in A_{1+\varepsilon}(G_m)$, შესაბამისად თეორემა 7.1-ის ძალით არსებობს $C_1, C_2 > 0$ მუდმივები ისეთი, რომ ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$C_1 \int_{G_m} |Q(f)|^{1+\varepsilon} \omega(x)\, d\mu \le \int_{G_m} |f|^{1+\varepsilon} \omega(x)\, d\mu \le C_2 \int_{G_m} |Q(f)|^{1+\varepsilon} \omega(x)\, d\mu,$$

თუ გათვალისწინებით ექსტრაპილაციის 6.6 თეორემას მივიღებთ, რომ არსებობს მხოლოდ მაჩვენებელზე დამოკიდებული მუდმივები $C'_{p(\cdot)}, C''_{p(\cdot)} > 0$ ისეთი, რომ ადგილი აქვს უტოლობებს:

$$C'_{p(\cdot)} \|Q(f)\|_{p(\cdot)} \le \|f\|_{p(\cdot)} \le C''_{p(\cdot)} \|Q(f)\|_{p(\cdot)}.$$

ამით თეორემა დამტიკიცებულია. □

სამართლიანია შემდეგი ლემა:

ლემა 7.1. *[17]. ვთქვათ, $r \in \mathbb{N}_+$, განვიხილოთ*

$$\sigma_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n} \right)^r \right) \varphi_k, \quad \zeta_n^{(r)} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 - \left(\frac{k}{n} \right)^r \right) k^r \varphi_k,$$

სადაც φ_k ეკუთვნის რაიმე E ბანახის სივრცეს. თუ $\|\zeta_n^{(r)}\| \le K, n \in \mathbb{N}_+$, მაშინ $\sigma_n^{(r)}$ კრებადია E სივრცის რაიმე s ელემენტისაკენ და $\|s - \sigma_n^{(r)}\| = O(Kn^{-r}), n \in \mathbb{N}_+$.

ლემა 7.2. *[28]. ვთქვათ, E არის ბანახის სივრცე და $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty} \subset E$. მაშინ $\sigma_n^{(1)}, \zeta_n^{(1)}$-თვის და*

$$r_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{C_{k+1}^{k}}{C_{n+1}^{n-1}}\, \sigma_{k+1}^{(1)},$$

გვაქვს ტოლობა:

$$(n+1)(\sigma_n^{(1)} - r_n) = \zeta_n^{(1)}, \quad n \in \mathbb{N}_+,$$

სადაც $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

ლემა 7.3. *ვთქვათ, $n \in \mathbb{N}_+$ და E არის ბანახის სივრცე. თუ $\|s - \sigma_m^{(1)}\| \le M/m, 1 \le m \le n$, რაიმე $s \in E$-თვის, მაშინ $\|\zeta_n^{(1)}\| \le 4M$.*

ლემა 7.4. *ვთქვათ $g = \{g_k\}_{k=1}^{\infty}$, სადაც $g_k \in L^{p(\cdot)}(G_m), k \in \mathbb{N}_+, 2 \le p(\cdot) < \infty$ და $1 \le q < \infty$, ამასთან*

$$\|g\|_{L^{p(\cdot)}(l^q)} = \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|^q \right)^{1/q} \right\|_{p(\cdot)}, \quad \|g\|_{l^q(L^{p(\cdot)})} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{p(\cdot)}^q \right)^{1/q}.$$

მაშინ $\|g\|_{L^{p(\cdot)}(l^2)} \le \|g\|_{l^2(L^{p(\cdot)})}$, როცა $p(\cdot) \ge 2$.

დამტკიცება. მართლაც, შევნიშნოთ, რომ სამართლიანია შემდეგი ტოლობა (იხ. [10])

$$\|f\|_{p(\cdot)}^r = \||f|^r\|_{\frac{p(\cdot)}{r}},$$

ნებისმიერი $0 < r \le p_-$. აქედან თუ $r = 1/2$ მივიღებთ, რომ სამართლიანია ტოლობა

$$\left\| |f|^{1/2} \right\|_{p(\cdot)} = \|f\|_{\frac{p(\cdot)}{2}}^{1/2},$$

მოცემული ტოლობისა და მინკოვსკის უტოლობის გამოყენებით მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} \|g\|_{L^{p(\cdot)}(l^2)} &= \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p(\cdot)} = \left\| \left(\sum_{k=1}^{\infty} |g_k|^2 \right) \right\|_{p(\cdot)/2}^{1/2} \\ &\le \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k^2\|_{p(\cdot)/2} \right)^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|g_k\|_{p(\cdot)}^2 \right)^{1/2} = \|g\|_{l^2(L^{p(\cdot)})}. \end{aligned}$$

□

სამართლიანია ჯექსონის თეორემის ანალოგი ცვლად მაჩვენებლიანი ლებეგის სივრცეებისთვის.

თეორემა 7.3. *ვთქვათ, $p(\cdot)$ მაჩვენებელი ისეთია, რომ $1 < p_- \le p_+ < \infty$, $p(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m)$, $r \in \mathbb{N}_+$, და $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$-თვის არსებობს $f^{[r]} \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ მაშინ*

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \le C n^{-r} \|f^{[r]}\|_{p(\cdot)}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ $f^{[r]} \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ არსებობს, მაშინ

$$\begin{aligned} \zeta_n^{(r)}(f) &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k^r}{n^r}\right)k^r\hat{f}(k)\psi_k = \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k^r}{n^r}\right)(S_{k+1}(f^{[r]})-S_k(f^{[r]})) \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{(k-1)^r}{n^r}\right)S_k(f^{[r]})-\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{k^r}{n^r}\right)S_k(f^{[r]}) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^r-(k-1)^r}{n^r}S_k(f^{[r]})+\left(1-\frac{(n-1)^r}{n^r}\right)S_n(f^{[r]}), \end{aligned}$$

ახლა თეორემა 1.29-ით მივიღებთ, რომ

$$\begin{aligned} \|\zeta_n^{(r)}(f)\|_{p(\cdot)} &\le \sum_{k=1}^{n-1}\frac{k^r-(k-1)^r}{n^r}\|S_k(f^{[r]})\|_{p(\cdot)}+\left(1-\frac{(n-1)^r}{n^r}\right)\|S_n(f^{[r]})\|_{p(\cdot)} \\ &\le \frac{(n-1)^r}{n^r}C\|f\|_{p(\cdot)}+\left(1-\frac{(n-1)^r}{n^r}\right)C\|f\|_{p(\cdot)} \le C_1\|f\|_{p(\cdot)}, \end{aligned}$$

საიდანაც ლემა 7.1-ით

$$\sigma_n^{(r)}(f)=\sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)^r\right)\hat{f}(k)\psi_k,$$

კრებადია $L^{p(\cdot)}(G_m)$-ში რაიმე $g \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ ელემენტისაკენ. ახლა რადგან $\sigma_n^{(r)}$ კრებადია f-კენ $L^1(G_m)$-ში და რადგან მისი ზღვარი თითქმის ყველგან ემთხვევა f-ს $L^{p(\cdot)}(G_m)$-ში ამიტომ მივიღებთ, რომ

$$\|\sigma_n^{(r)}-f\|_{p(\cdot)} \to 0, \quad \text{როცა} \quad n \to \infty.$$

და საბოლოოდ ლემა 7.1-დან მივიღებთ, რომ

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \le \|\sigma_n^{(r)}-f\|_{p(\cdot)} = O(n^{-r}\|f^{[r]}\|_{p(\cdot)}).$$

ამით თეორემა დამტკიცებულია. □

ვიტყვით, რომ $f \in \mathscr{P}_n$ თუ $f \in L^1(G_m)$ და $\hat{f}(k)=0$ როცა $k \ge n$. ადგილი აქვს ბერშტეინის თეორემის ანალოგს წონიან ლებეგის სივრცეებში.

თეორემა 7.4. *[28]. ვთქვათ,* $1<p<\infty$, $\omega \in A_p(G_m)$, $r \in \mathbb{N}$ *და* $t_n \in \mathscr{P}_n$*. მაშინ*

$$\|t_n^{[r]}\|_{p,\omega} \le C_{p,\omega}n^r\|t_n\|_{p,\omega}.$$

მოცემულ თეორემაზე დაყრდნობით ვამტკიცებთ ბერშტეინის თეორემის ანალოგს ცვლად მაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში.

თეორემა 7.5. *ვთქვათ,* $p(\cdot)$ *მაჩვენებელი ისეთია, რომ* $1<p_-\le p_+<\infty$, $p(\cdot)\in\mathscr{A}(G_m)$, $r \in \mathbb{N}_+$ *და* $t_n \in \mathscr{P}_n$ *მაშინ* $\|t_n^{[r]}\|_{p(\cdot)} \le C_{p(\cdot)}n^r\|t_n\|_{p(\cdot)}$.

დამტკიცება. რადგან $1 < p_- \leq p_+ < \infty$, $p(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m)$ ამიტომ თეორემა 6.4-ის ძალით M მაქსიმალური ფუნქცია შემოსაზღვრულია $L^{p(\cdot)}(G_m)$-ში. თეორემა 6.5-ის ძალით შეგვიძლია ავარჩიოთ $\varepsilon > 0$ ისეთი, რომ $(1+\varepsilon) < p_- \leq p_+ < \infty$ და M მაქსიმალური ოპერატორი შემოსაზღვრულია $L^{p(\cdot)/(1+\varepsilon)}(G_m)$-ში. ახლა ვთქვათ $\omega \in A_1(G_m)$ მაშინ $\omega \in A_{1+\varepsilon}(G_m)$. თეორემა 7.4-ით გვაქვს, რომ არსებობს $C_{p,\omega} > 0$ მუდმივი ისეთი, რომ

$$\int_{G_m} |t_n^{[r]}(x)|^{1+\varepsilon}\omega(x)\,d\mu \leq C_{p,\omega} n^r \int_{G_m} |t_n|^{1+\varepsilon}\omega(x)\,d\mu,$$

მოცემულის გათვალისწინებით თუ გამოვიყენებთ ექსტრაპილაციის 6.6 თეორემას მივიღებთ, რომ არსებობს მხოლოდ მაჩვენებელზე დამოკიდებული მუდმივი $C_{p(\cdot)} > 0$ ისეთი, რომ

$$\|t_n^{[r]}\|_{p(\cdot)} \leq C_{p(\cdot)} n^r \|t_n\|_{p(\cdot)},$$

და $\varepsilon > 0$-ის ნებიემიერობის გამო მივიღებთ დასამტკიცებელს. □

სამართლიანია შემდეგი თეორემა.

თეორემა 7.6. *ვთქვათ,* $p(\cdot)$ *მაჩვენებელი ისეთია, რომ* $p(\cdot) \in [2,\infty)$, $p(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m)$, $r \in \mathbb{N}_+$ *და* $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$, *თუ* $\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r-1}E_k^2(f)_{p(\cdot)}$ *კრებადია მაშინ არსებობს* $f^{[r]} \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ *და ასევე*

$$E_n(f^{[r]})_{p(\cdot)} \leq C\left[n^r E_n(f)_{p(\cdot)} + \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} k^{2r-1}E_k^2(f)_{p(\cdot)}\right)^{1/2}\right].$$

დამტკიცება. ვაჩვენოთ, რომ $\sum_{k=1}^{\infty} k^r \hat{f}(k)\psi_k$-ს კრებადობა $L^{p(\cdot)}(G_m)$-ში. ვთქვათ $n < q$ და $s, l \in \mathbb{N}$ ისეთია, რომ $M_{s-1} \leq n < M_s$, $M_{l-1} \leq q < M_l, s \leq l$. თუ $s < l$ მაშინ

$$\sum_{k=n}^{q} k^r \hat{f}(k)\psi_k = \left(\sum_{k=n}^{M_s-1} + \sum_{k=M_s}^{M_{l-1}-1} + \sum_{k=M_{l-1}}^{q}\right) k^r \hat{f}(k)\psi_k = I_1 + I_2 + I_3,$$

შეიძლება I_2 იყოს ნულის ტოლი. თეორემა 7.2-ის ძალით

$$\|I_2\|_{p(\cdot)} \leq C_1 \left\| \left(\sum_{j=s}^{l-2} \left|\sum_{k=M_j}^{M_{j+1}-1} k^r \hat{f}(k)\psi_k\right|^2\right)^{1/2} \right\|_{p(\cdot)},$$

აქედან ლემა 7.4-ის გამოყენებით

$$\|I_2\|_{p(\cdot)} \leq C_2 \left(\sum_{j=s}^{l-2} \left\|\sum_{k=M_j}^{M_{j+1}-1} k^r \hat{f}(k)\psi_k\right\|_{p(\cdot)}^2\right)^{1/2}. \tag{7}$$

თეორემა 6.7 და 7.5-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{k=M_j}^{M_{j+1}-1} k^r \hat{f}(k)\psi_k\right\|_{p(\cdot)} &\leq C_3 M_{j+1}^r \left\|\sum_{k=M_j}^{M_{j+1}-1} \hat{f}(k)\psi_k\right\|_{p(\cdot)} \\ &\leq C_3 M_{j+1}^r \|S_{M_{j+1}}(f) - f + f - S_{M_j}(f)\|_{p(\cdot)} \\ &\leq C_4 M_{j+1}^r E_{M_j}(f)_{p(\cdot)}.\end{aligned} \tag{8}$$

ანალოგიურად მივიღებთ, რომ $\|I_1\|_{p(\cdot)} \leq C_4 n^r E_n(f)_{p(\cdot)}$ და $\|I_3\|_{p(\cdot)} \leq C_4 M_{l-1}^r E_{M_{l-1}}(f)_{p(\cdot)}$ თუ $s = l$ ჩვენ შევაფასებთ მხოლოდ I_1-ს. ზემოთ მოყვენილი უტოლობების გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ

$$\left\|\sum_{k=n}^{q} k^r \hat{f}(k)\psi_k\right\|_{p(\cdot)} \leq C_5 \left[n^r E_n(f)_{p(\cdot)} + \left(\sum_{j=s}^{l-1} M_j^{2r} E_{M_j}^2(f)_{p(\cdot)}\right)^{1/2}\right].$$

ცნობილია, რომ $\sum_{j=1}^{\infty} M_j^{2r} E_{M_j}^2(f)_{p(\cdot)}$ მწრივის კრებადობა ექვივალენტურია $\sum_{k=1}^{\infty} k^{2r-1} E_k^2(f)_{p(\cdot)}$ მწკრივის კრებადობის. საიდანაც გამომდინარეობს $\sum_{k=1}^{\infty} k^r \hat{f}(k)\psi_k$-ის კრებადობა $L^{p(\cdot)}(G_m)$-ში. ახლა ვთქვათ $M_{s-1} \leq n < M_s$ მაშინ თეორემა 7.2, (7) და (8)-დან მივიღებთ

$$\begin{aligned} E_n(f^{[r]})_{p(\cdot)} &\leq \|f^{[r]} - S_n(f^{[r]})\|_{p(\cdot)} \leq C_6 \left\| \left(\left| \sum_{k=n}^{m_s-1} k^r \hat{f}(k)\psi_k \right|^2 + \sum_{j=s}^{\infty} \left| \sum_{k=M_j}^{M_{j+1}-1} k^r \hat{f}(k)\psi_k \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_{p(\cdot)} \\ &\leq C_7 \left[n^r E_n(f)_{p(\cdot)} + \left(\sum_{j=s}^{\infty} M_j^{2r} E_{M_j}^2(f)_{p(\cdot)} \right)^{1/2} \right], \end{aligned}$$

საიდანაც გამომდინარეობს დასამტკიცებელი. □

$L^{p(\cdot)}(G_m)$ სივრცეში განვსაზღვროთ უწყვეტობის მოდული რომელიც ადაპტირებულია ვილენკინის სისტემისთვის:

$$\omega_n(f)_{p(\cdot)} = \sup_{k \geq n} \left\| f(x) - \frac{1}{|I_k(x)|} \int_{I_k(x)} f(t)\, d\mu \right\|_{p(\cdot)}.$$

კარგად არის ცნობილი, რომ

$$S_{M_k}(f)(x) = \frac{1}{|I_k(x)|} \int_{I_k(x)} f(t)\, d\mu.$$

თუ $p(\cdot)$ მაჩვენებელი ისეთია, რომ $1 < p_- \leq p_+ < \infty$, $p(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m)$ თეორემა 6.7-ის გვექნება

$$E_{M_k}(f)_{p(\cdot)} \leq \|f - S_{M_k}(f)\|_{p(\cdot)} \leq C E_{M_k}(f)_{p(\cdot)}.$$

მაშასადამე $\omega_n(f)_{p(\cdot)} \asymp E_{M_k}(f)_{p(\cdot)}, f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ და $\omega_n(f)_{p(\cdot)}$-ს შეფასება ადვილად მიიღება თეორემა 7.6-დან.

ვთქვათ, $p(\cdot)$ მაჩვენებელი ისეთია, რომ $1 < p_- \leq p_+ < \infty, p(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m), r \in \mathbb{N}$. $W^r L^{p(\cdot)}(G_m)$-ით აღვნიშნოთ ყველა ისეთ $g \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ ფუნქიცათა ერთობლიობა, რომლისთვისაც $g^{[r]} \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ შემდეგი $\|g^{[r]}\|_{p(\cdot)}$ ნახევარ-ნორმით. განვიხილოთ K-ფუნქციონალი განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$K_r(f,t) = K_r(f,t,L^{p(\cdot)}(G_m), W^r L^{p(\cdot)}(G_m)) = \inf\left\{\|f-g\|_{p(\cdot)} + t\|g^{[r]}\|_{p(\cdot)} : g \in W^r L^{p(\cdot)}(G_m)\right\}.$$

სამართლიანია შემდეგი პირდაპირი და შებრუნებული აპროქსიმაციის თეორემები $K_r(f,t)$ ფუნქციონალის ტერმინებში.

თეორემა 7.7. *ვთქვათ* $p(\cdot)$ *მაჩვენებელი ისეთია, რომ* $p(\cdot) \in [2,\infty)$, $p(\cdot) \in \mathscr{A}(G_m)$, *მაშინ ყოველი* $f \in L^{p(\cdot)}(G_m)$ *და* $n \in \mathbb{N}$*-თვის გვაქვს*

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq CK_r(f, n^{-r}), \tag{9}$$

და

$$K_r(f, n^{-r}) \leq Cn^{-r} \left(\sum_{k=1}^{n} [k^r E_k(f)_{p(\cdot)}]^2 k^{-1} \right)^{1/2}. \tag{10}$$

დამტკიცება. საუკეთესო მიახლოების ნახევრად-ადიციურიობისა და თეორემა 7.3-ის ძალით $g \in W^r L^{p(\cdot)}(G_m)$-თვის გვაქვს

$$E_n(f)_{p(\cdot)} \leq E_n(f-g)_{p(\cdot)} + E_n(g)_{p(\cdot)} \leq C_1 \left(\|f-g\|_{p(\cdot)} + n^{-r} \|g^{[r]}\|_{p(\cdot)} \right).$$

თუ უკანასკნელი უტოლობის მარჯვენა მხარეს ავიღებთ ინფიმუმს ყველა $g \in W^r L^{p(\cdot)}(G_m)$-ს მიმართ მივიღებთ (9)-ს. ვთქვათ $t_k \in \mathscr{P}_{M_k}$ ისეთია, რომ $\|f - t_k\| = E_{M_k}(f)_{p(\cdot)}, s_k = t_k - t_{k-1}$ როცა $k \in \mathbb{N}_+, s_0 = t_0$ იყოს მუდმივი G_m-ზე. სამკუთხედის უტოლობით მივიღებთ, რომ $\|s_k\|_{p(\cdot)} \leq 2E_{M_{k-1}}(f)_{p(\cdot)}$. ვთქვათ $t_k = \sum_{j=0}^{k} s_j$ და $s_0^{[1]} = 0$. თეორემა 7.5-ის (7)-(8)-ს გამოყენებით მივიღებთ

$$\begin{aligned}
K_r(f, M_k^{-r}) &\leq \|f - t_k\|_{p(\cdot)} + M_k^{-r} \|t_k^{[r]}\|_{p(\cdot)} = E_{M_k}(f)_{p(\cdot)} + M_k^{-r} \left\| \sum_{j=1}^{k} s_j^{[r]} \right\|_{p(\cdot)} \\
&\leq E_{M_k}(f)_{p(\cdot)} + C_2 M_k^{-r} \left(\sum_{j=1}^{k} \|s_j^{[r]}\|_{p(\cdot)}^2 \right)^{1/2} \\
&\leq E_{M_k}(f)_{p(\cdot)} + C_3 M_k^{-r} \left(\sum_{j=1}^{k} M_j^{2r} E_{M_{j-1}}^2(f)_{p(\cdot)} \right)^{1/2} \\
&\leq C_4 M_k^{-r} \left(\sum_{j=1}^{k} M_j^{2r} E_{M_{j-1}}^2(f)_{p(\cdot)} \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

აქედან კი $E_n(f)_{p(\cdot)}$-სა და $K_r(f,t)$-ს მონოტონურობის გათვალისწინებით ადვილად მივიღებთ (10)-ს. ამით თეორემა დამტკიცებულია. $\square$

დასკვნა

მოცემულ სამაგისტრო ნაშრომში $L^{p(\cdot)}(G_m)$ სივრცეში დამტკიცებულია $f^{[r]}$-ს არსებობის თეორემა. P - წარმოებულის ტერმინებში მიღებულია ჯექსონისა და ბერშტეინის კლასიკური უტოლობები ვილენკინის სისტემის მიმართ ცვლად მაჩვენებლიან ლებეგის სივრცეებში. ასევე, მოცემულ ნაშრომში დამტკიცებულია $Q(f)$ ოპერატორისა და f ფუნქციის ნორმების ექვივალენტობა $L^{p(\cdot)}(G_m)$ სივრცეში რომლის საშუალებითაც შეფასებულია $f^{[r]}$ წარმოებულის საუკეთესო მიახლოება f ფუნქციის საუკეთესო მიახლოების საშუალებით. ასევე შემოღებულია K ფუნქციონალი, რომლის ტერმინებშიც მიღებულია და შეფასებულია საუკეთესო მიახლოება.

ლიტერატურა

[1] Adamadze D. and Kopaliani T. *Vilenkin-Fourier series in variable Lebesgue spaces*, Vol 26, **4**, 977-993, (2023).

[2] Agaev G., Vilenkin N., Dzahafarly G. and Rubinstein A., *Multiplicative systems of functions and harmonic analysis on zero-dimensional groups*, Baku, Ehim, (1981).

[3] Alfsen E., *A simplified constructive proof of existence and uniqueness of haar measure*, Mathematica Scandinavica, **12** (1963), 106–116.

[4] Bredon G., *A new treatment of the Haar integral*, The Michigan Mathematical Journal, **10** (1963), 365–373.

[5] Butzer, P., and Wagner J. *Walsh-Fourier Series and the Concept of a Derivative*, Applicable Ana **3** (1973): 29-46.

[6] Cartan H., *Sur la mesure de haar*, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris **211** (1940), 759-762.

[7] Cruz-Uribe D., Fiorenza A., Martell J.M. and Pérez C., *The boundedness of classical operators on variable L^p spaces*, Ann. Acad.Sci. Fen. Math. **31**(1): 239-264, 2006.

[8] Cruz-Uribe D. and Fiorenza A., *Variable Lebesgue Spaces, Foundations and Harmonic Analysis*, Birkhauser, Basel (2013).

[9] Cruz-Uribe D., Martell J.M. and Pérez C., *Weights, extrapolation and theory of Rubio de Francia*, Operator Theory: Advances and Applications, 2015, Birkhauser/Springer Basel AG, Basel, (2011).

[10] Diening L., Harjulehto P., Hästö P. and Růžička M., *Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents*, Lecture Notes in Mathematics, 2017. Springer, Heidelberg (2011).

[11] Dzhafarli G. M., “On multiplicative orthonormal systems of functions closed under the taking the root operation,” Izv. AN Azerb. SSR **6**, 11–23 (1961) [in Russian].

[12] Folland G. B., *Real analysis: modern techniques and their applications*. Vol. **40**. John Wiley & Sons, (1999).

[13] Gosselin J. A., *A weighted norm inequality for Vilenkin-Fourier series*, Proc. Amer. Math. Soc. **49** (1975), 349-353.

[14] Haar A., *Der massbegriff in der theorie der kontinuierlichen gruppen*, Annals of Mathematics, **34** (1933), 147-169.

[15] Jiao Y., Weisz F., Wu L. and Zhou D., *Variable martingale Hardy spaces and their applications in Fourier analysis*, Dissertationes Math. **550** (2020) pp. 1-67.

[16] Kopaliani T., *Infimal convolution and Muckenhoupt $A_p(\cdot)$ condition in variable L^p spaces*, Arch. Math. (Basel), **89** (2):185–192, (2007).

[17] Králik, D. *Über die approximationstheoretische Charakterisierung gewisser Funktionenklassen mit Hilfe der Rieszschen Mittel von Fourierreihen*. Acta Math. Acad. Sci. Hun. **20**, 361–373 (1969).

[18] Lerner A. K., *On some questions related to the maximal operator on variable L^p spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., **362** (8):4229-4242, (2010).

[19] Muckenhoupt B., *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), 207-251.

[20] Neumann J. V., *Die einfuhrung analytischer parameter in topologischen gruppen*, Annals of Mathematics **34** (1933), 170–179.

[21] Onneweer, C. W. *Differentiability for Rademacher series on groups*, Acta Sci. Math.(Szeged) **39**, 1-2 (1977): 121-128.

[22] Onneweer, C. W., and Butzer, P. L., *On the definition of dyadic differentiation*, Applicable Analysis, 9(4), 267–278, (1979).

[23] Persson L.-E., Tephnadze G. and Weisz F., *Martingale Hardy Spaces and Summability of one-dimenional Vilenkin-Fourier Series*, Birkhäuser/Springer, (2022).

[24] Pontryagin L. S., *Continuous Groups* [in Russian], Gostekhizdat, Moscow (1954).

[25] Schipp F., *On L^p -convergence of series with respect to product systems*, Analysis Mathematica, **2** (1976), 49-64.

[26] Simon P., *Verallgemeinerte Walsh-Fourierreihen*, II, Acta Math.Acad. Sci. Hungar. **27** (1976), 49-64.

[27] Simon P., *On a maximal function*, Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sect. Math. **21** (1978), 41-44.

[28] Volosivets S. S., *Approximation by polynomials with respect to multiplicative systems in weighted L^p-spaces*, Sib. Math. J. Vol. **56**, No1, pp. 68-77, (2015).

[29] Weil A., *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications*, Hermann, Paris, (1938).

[30] Young W-S., *Weighted norm inequalities for Vilenkin-Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **340** (1993), 273–291.

[31] Young W-S., *Mean convergence of generalized Walsh-Fourier series*, Trans. Amer. Math. Soc. **218** (1976), 311-320.

[32] Zelin, He. *The derivatives and integrals of fractional order in Walsh-Fourier analysis, with applications to approximation theory*, Journal of Approximation Theory **39** (1983): 361-373.