ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,
მათემატიკის დეპარტამენტი

სამაგისტრო პროგრამის სახელწოდება: მათემატიკა

მარიამ ყაზაიშვილი

გლობალური მონოდრომიის გამოთვლა ჰიპერგეომეტრიული განტოლებისთვის

მათემატიკაში მაგისტრის ხარისხის მოსაპოვებლად წარმოდგენილი ნაშრომი

სამეცნიერო ხელმძღვანელები:
გრიგორი გიორგაძე - ფიზ.-მათ. მეცნ. დოქტორი,
ასოცირებული პროფესორი

გეგა გულაღაშვილი - აკადემიური დოქტორი,
ილია ვეკუას სახელობის
გამოყენებითი მათემატიკის ისტიტუტის
მენციერ თანამშრომელი

თბილისი 2024

ს ა რ ჩ ე ვ ი

ანოტაცია

ნაშრომში შესწავლილია მრავალსახა ფუნქციის ზმულობის ამოცანა ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ამონახსნთა სივრცისათვის. ჰიპერგეომეტრიულ განტოლებას, რომელიც მოცემულია გაფართოებულ კომპლექსურ სიბრტყეზე, აქვს სამი რეგულარული განსაკუთრებული წერტილი. თითოეულ განსაკუთრებულ წერტილს შეესაბამება ორგანზომილებიანი ვექტორული სივრცე თავისი ფიქსირებული ბაზისით, რომლის ელემენტები წარმოადგენენ წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნებს განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში. ლოკალური მონოდრომიის ჯგუფი მოქმედებს ამონახსნთა სივრცეზე და ამგვარად მიიღება განტოლების ყველა ამონახსნი. თითოეული ლოკალურად მოცემული ამონახსნი გაგრძელებადია ნებისმიერი წირის გასწვრივ, რომელიც არ გაივლის განსაკუთრებულ წერტილზე და ამრიგად, ისმება ორი ამონახსნის ერთმანეთთან დაკავშირების ამოცანა, რომელიც ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ამონახსნებისათვის გამოიხატება გლობალური მონოდრომიის ჯგუფის გამოთვლაში. ნაშრომში გამოთვლილია გლობალური მონოდრომიის ჯგუფი ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციების ტერმინებში, ამასთან გამოყენებულია არაკომპაქტური რიმანის ზედაპირის ფუნდამენტური და ლოკალური მონოდრომიის ჯგუფების თვისებები. ამ გზით მიღებულია ცნობილი შედეგების ახალი ინტერპრეტაცია და ახლებური დამტკიცება.

Resume

In this manuscript studies the problem of the connectivity of multi-valued functions for the solution space of hypergeometric equations. The hypergeometric equation, which is given on the extended complex plane, has three regular singular points. Each singular point corresponds to a two-dimensional vector space with its fixed basis, whose elements represent linearly independent solutions in the neighborhood of the singular point. The local monodromy group acts on the solution space, thus obtaining all solutions of the equation. Each locally given solution is extendable along any path that does not pass through a singular point, thus are posed the problem of connecting two solutions, which is expressed in terms of the local monodromy group for the hypergeometric equation solutions. In the manuscript calculates the global monodromy group in terms of hypergeometric functions, using the properties of the fundamental and local monodromy groups of a non-compact Riemann surface. In this way, a new interpretation and novel proof of known results are obtained.

შესავალი

ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციისა და შემდგომ ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ისტორია სათავეს იღებს კარლ ფრიდრიხ გაუსის (1777-1855) ნაშრომიდან სახელად G.F. Gauss, Disquisitiones generales circa seriem infinitam, $1+\frac{\alpha\beta}{\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)1\cdot 2}x^2+\cdots$, (1812), C.F. Gauss Werke 3, 123–162. ამ ნაშრომში გაუსმა მოიყვანა ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის ბევრი თვისება. გაუსის ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის, როგორც კომპლექსური ცვლადის ფუნქციის გლობალური სტრუქტურა ე. ი. მისი მონოდრომიისა და ანალიზური გაგრძელებების თვისებები ინტენსიურად შეისწავლა ბერნჰარდ რიმანმა (1826-1866). ანალიზური გაგრძელებები მთლიანად მონოდრომიის ჯგუფსა და მონოდრომიის წარმოდგენაში გადმოიცემა.

მონოდრომიის პრინციპი, რომელიც მოდის ბერძნული სიტყვიდან μονό - ერთი და δρομος - გზა გულისხმობს, რომ ანალიზური გაგრძელება არ უნდა იყოს დამოკიდებული გზაზე, რომელი გზის გასწვრივაც ვაგრძელებთ ფუნქციას, გარდა იმ შემთხვევისა როდესაც რაღაც ხელს უშლის დეფორმაციას. დიფერენციალური განტოლებების შემთხვევაში ის, რაც ხელს უშლის დეფორმაციას არის ჩვეულებრივ განსაკუთრებულობის (სინგულარობის) არსებობა და მონოდრომია შეგვიძლია განვიხილოთ როგორც განსაკუთრებულობის ეფექტი, რომელიც ანალიზური გაგრძელების შედეგად ცვლის საწყის მნიშვნელობას.

მაგალითად შემდეგი დიფერენციალური განტოლებათა სისტემის

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dz}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\mathrm{z}} & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\mathrm{f},$$

განსაკუთრებული წერტილია $\mathrm{z}=0$ წერტილი. ამ სისტემის ფუნდამენტური მატრიცა ე. ი. მატრიცა რომლის სვეტებში წერია დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნები არის შემდეგი სახის

$$\mathrm{F}=\begin{pmatrix}\mathrm{z} & \mathrm{z}\ln(\mathrm{z})\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

მართლაც:

$$\frac{dF}{dz} = \begin{pmatrix} 1 & \ln(z)+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ ხოლო } \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & z\ln(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \ln(z)+1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ ე. ი.}$$

$$\frac{dF}{dz} = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} F.$$

$z = 0$ წერტილის გარშემო ანალიზური გაგრძელების შედეგად საწყისი ამონახსნები შეიცვლებიან ე. ი. ფუნდამენტური მატრიცა შეიცვლება შემდეგი წესით:

$$\tilde{F} = \begin{pmatrix} z & z\ln(z) + 2\pi i z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z & z\ln(z) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$M = \begin{pmatrix} 1 & 2\pi i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ მატრიცას ეწოდება მონოდრომიის მატრიცა ან ლოკალური მონოდრომია $z = 0$ განსაკუთრებულ წერტილში.

ჩვენ მიმოვიხილავთ ჰიპერგეომეტრიული განტოლებისაგან წარმოქმნილ ლოკალურ და გლობალურ მონოდორმიებს, რომლებიც ცნობილი და კარგად შესწავლილი საკითხებია, მაგრამ გადმოცემულია თანამედროვისათვის ძნელად გასაგებ ენაზე, მაგალითად ფელიქს კლაინის (1849-1925) მიერ ე. წ. უნიფორმიზაციის ტერმინებში და შევეცდებით გარკვეული საკითხები შედარებით გასაგებ ენაზე გადმოვცეთ.

თავი I. ფუქსის ტიპის დიფერენციალური განტოლება და სისტემები

1. 1. ფუქსის განტოლება

წინამდებარე ნაშრომში განსახილველი საკითხია გლობალური მონოდრომიები, რომლებიც უკავშირდებიან ჰიპერგეომეტრიული განტოლებისთვის. თავის მხრივ ჰიპერგეომეტრიული განტოლება წარმოადგენს ფუქსის განტოლების კერძო შემთხვევას. იმისათვის, რომ უკეთ გავერკვეთ და დავინახოთ რის შესახებ გვექნება საუბარი მიმოხილვა დავიწყოთ ფუქსის განტოლებით.

ვთქვათ $f\colon A \to B$ არის კომპლექსური ცვლადის ფუნქცია, რომლების მნიშვნელობები აგრეთვე კომპლექსური რიცხვებია - $A,\ B \subset \mathbb{C}$ და A არის $\mathbb{C}$-ს ღია სიმრვალე.

განსაზღვრება 1.1.1.: f ფუნქციას ვუწოდებთ ჰოლომორფულ ფუნქციას თუ f ფუნქცია წარმოებადია კომპლექსური ცვლადით თავისი განსაზღვრის არის ყოველ წერტილში.

განსაზღვრება 1.1.2.: f ფუნქციას ვუწოდებთ ანალიზურ ფუნქცია თუ f ფუნქციის მნიშვნელობა თავისი განსაზღვრის არის ყოველი წერტილზე არის რომელიღაც ხარისხოვანი მწკრივის ჯამი ე. ი.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \tag{1.1.1.}$$

სადაც ყოველი n-სათვის $a_n \in \mathbb{C}$ კომპლექსური რიცხვია.

განსაზღვრება 1.1.3.: ჰოლომორფულ ფუნქციას, რომელსაც იზოლირებულ წერტილებში აქვს პოლუსები ვუწოდებთ მერომორფულ ფუნქციას.

განვიხილოთ n რიგის ჩვეულებრივი წრფივი დიფერენციალური განტოლება, რომელიც მოცემულია შემდეგი ფორმით:

$$y^{(n)} + a_1(z)y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}(z)y^{(1)} + a_n(z)y = 0, \qquad (1.1.2.)$$

სადაც $a_i(z)$ კომპლექსური ცვლადისა და კომპლექსური მნიშვნელობების მქონე ფუნქციაა, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ n$.

განსაზღვრება 1.1.4.: განვიხილოთ $\alpha \in \mathbb{C}$ კომპლექსური რიცხვი. თუ ყოველი $i \in \{1, 2, \dots, n\}$-თვის არსებობს $\lim\limits_{x\to\alpha} a_i(z)$ ზღვარი და ეს ზღვარი სასრული რიცხვია, მაშინ $\alpha \in \mathbb{C}$ კომპლექსურ რიცხვს ვუწოდებთ რეგულარულს, ხოლო თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to\infty} z^{2i}a_i(z)$ ზღვარი და ეს ზღვარი სასრული რიცხვია, მაშინ ∞ წერტილს ვუწოდებთ რეგულარულს.

განსაზღვრება 1.1.5.: $\mathbb{CP}^1$ რიმანის სფეროს წერტილს, რომელიც არ არის რეგულარული ვუწოდებთ განსაკუთრებულს ან სინგულარულს.

განსაზღვრება 1.1.6.: განვიხილოთ $\alpha \in \mathbb{C}$ კომპლექსური რიცხვი. თუ ყოველი $i \in \{1, 2, \dots, n\}$-თვის არსებობს $\lim\limits_{x\to\alpha}(z-\alpha)^i a_i(z)$ ზღვარი და ეს ზღვარი სასრული რიცხვია, მაშინ $\alpha \in \mathbb{C}$ კომპლექსურ რიცხვს ვუწოდებთ რეგულარულ სინგულარულ წერტილს, ხოლო თუ არსებობს $\lim\limits_{x\to\infty} z^i a_i(z)$ ზღვარი და ეს ზღვარი სასრული რიცხვია, მაშინ ∞ წერტილს ვუწოდებთ რეგულარულ სინგულარულ წერტილს.

განსაზღვრება 1.1.7.: განვიხილოთ $\alpha \in \mathbb{C}$ რეგულარული ან რეგულარული განსაკუთრებული წერტილი, მაშინ შემდეგ განტოლებას ვუწოდებთ მახასიათებელ განტოლებას α წერტილში:

$$\lambda(\lambda-1)\dots\big(\lambda-(n-1)\big) + \alpha_1\lambda(\lambda-1)\dots\big(\lambda-(n-2)\big) + \cdots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n = 0, \quad (1.1.3.)$$

თავად პოლინომს ვუწოდებთ მახასიათებელ პოლინომს.

განსაზღვრება 1.1.8.: თუ ∞ წერტილი რეგულარული ან რეგულარული განსაკუთრებული წერტილია, მაშინ განტოლებას:

$$\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-1) - \alpha_1\lambda(\lambda+1)\dots(\lambda+n-2) + \cdots + (-1)^{n-1}\alpha_{n-1}\lambda + (-1)^n\alpha_n = 0, \quad (1.1.4.)$$

ვუწოდებთ მახასიათებელ განტოლებას ∞ წერტილში, ხოლო პოლინომს ვუწოდებთ მახასიათებელ პოლინომს ∞ წერტილში.

განსაზღვრება 1.1.9.: $\alpha \in \mathbb{CP}^1$ წერტილის მახასიათებელი პოლინომების ფესვებს ვუწოდებთ ლოკალური ექსპონენტები α წერტილში.

განსაზღვრება 1.1.10.: მერომორფულ კოეფიციენტებიან დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას ვუწოდებთ ფუქსის სისტემა თუ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტებს აქვთ სასრული რაოდენობის პირველი რიგის პოლუსები.

ჩვენი განხილვის საგანი ფუქსის განტოლების კერძო შემთხვევაა, რომელსაც ჰიპერგეომეტრიული განტოლება ჰქვია.

1. 2. ფუქსის სისტემები

განვიხილოთ ჩვეულებრივი წრფივი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$X'(z) = A(z)X(z), \qquad (1.2.1.)$$

სადაც $A(z)$ მატრიც-ფუნქციაა, რომელიც ჰოლომორფულია $\mathbb{CP}^1 \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$-ზე და მისი განსაკუთრებული წერტილებია - $s_1, s_2, \dots, s_m$.

განსაზღვრება 1.2.1.: $(1.2.1.)$ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას ეწოდება მერომორფული თუ $A(z)$ ე. ი. დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის კოეფიციენტებისაგან შედგენილი მატრიცული ფუნქცია არის მერომორფული.

განსაზღვრებიდან გამომდინარე ჯერ განვიხილოთ მერომორფულობის პირობა, ამისათვის კი ∞ განსაკუთრებულ წერტილში ჩავატაროთ ცვლადის გარდაქმნა შემდეგი წესით:

$$w = \frac{1}{z} \qquad (1.2.2.)$$

შედეგად მივიღებთ ცვლადის გარდაქმნით გარდაქმნილ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას

$$Y'(w) = B(w)Y(w), \qquad (1.2.3.)$$

სადაც $B(w) = -w^{-2}A(w^{-1})$. გარდაქმნამდე არსებული (1.2.1.) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა მერომორფულია ∞ წერტილში $\Leftrightarrow -w^{-2}A(w^{-1})$ მატრიცული ფუნქცია მერომორფულია $w = 0$ წერტილში.

ახლა განვიხილოთ ზემოთ მოყვანილი განსაზღვრების მეორე პირობა როდესაც $A(z)$ მატრიცულ ფუნქციას აქვს სასრული რაოდენობის პირველი რიგის განსაკუთრებული (სინგულარული) წერტილები, რომლებიც აღნიშნულია $s_1,\ s_2,\ \dots,\ s_m$ სიმბოლოებით. რადგან $A(z)$ მატრიცული ფუნქციისათვის ∞ არის აცილებადი განსაკუთრებული წერტილი ($A(z)$-ს $\mathbb{CP}^1$-ზე პოლუსების გარდა სხვა განსაკუთრებული წერტილები არა აქვს) $A(z)$ მატრიცული ფუნქცია გამოდის რაციონალური და აქედან გამომდინარე მას აქვს სახე:

$$A(z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{z - s_i} + C(z), \qquad (1.2.4.)$$

სადაც A_i მუდმივი მატრიცებია, ხოლო $C(z)$ არის პოლინომიალური წევრებისაგან შედგენილი მატრიცული ფუნქცია, $i = 1,\ 2,\ \dots, m$. უცნობთა გარდაქმნის შედეგად მიღებული დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის მარტიცა იქნება შედეგი სახის:

$$B(w) = -w^{-2}A(w^{-1}) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{w(1 - s_i w)} - w^{-2}C(w^{-1}). \qquad (1.2.5.)$$

თუ საწყისი დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა არის ფუქსის მაშინ $B(w)$ მატრიცულ ფუნქციას $w = 0$ წერტილში აქვს პირველი რიგის პოლუსი ე. ი. $w^{-2}C(w^{-1})$ მატრიცულ ფუნქციას აქვს პირველი რიგის პოლუსი $w = 0$ წერტილში. ეს კი მხოლოდ მაშინაა შესაძლებელი თუ $C(z) = 0$. აქედან გამომდინარე

$$A(z) = \sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{z - s_i}. \qquad (1.2.6.)$$

შებრუნებული წინადადება მარტივი დასანახია. საბოლოოდ სამართლიანი გამოდის შემდეგი წინადადება.

წინადადება 1.2.1.: ფუქსის სისტემა არის შედეგი სახის დიფერეციალურ განტოლებათა სისტემა:

$$X'(z) = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{z - s_i}\right) X(z), \qquad (1.2.7.)$$

სადაც A_i კომპლექსურ მნიშვნელობიანი მუდმივი მატციებია, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ m$.

თავი II. მონოდრომიის ჯგუფი

2. 1. ლოკალური და გლობალური მონოდრომია

$(1.2.1.)$ წრფივ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემას $z_0 \in \mathbb{CP}^1 \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$ წერტილის მიდამოში, ყოველთვის აქვს n წრფივად დამოუკიდებელ ამონახსნი $F = \big(f_1(z),\ f_2(z),\ \dots,\ f_n(z)\big)$. თითოეული $f_i(z)$ გაგრძელებადია ნებისმიერი წირის გასწვრივ $i = 1,\ \dots,\ m$. $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \dots,\ \gamma_m$ სიმბოლოებით აღვნიშნოთ შეკრული მარტივი წირები, რომლებიც z_0 წერტილში იწყებიან და მთავრდებიან და ერთხელ შემოუვლიან $s_1,\ s_2,\ \dots,\ s_m$ წერტილებს დადებითი მიმართულებით (საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით). $f_i(z)$ ფუნქციის s_j განსაკუთრებული წერტილის გარშემო ე. ი. γ_j წირის გასწვრივ გაგრძელების შედეგად მიღებული ფუნქცია აღვნიშნოთ $\tilde{f}_i^j(z)$ სიმბოლოთი i, $j = 1,\ \dots,\ m$. $\tilde{F}_j = \left(\tilde{f}_1^j(z),\ \tilde{f}_2^j(z),\ \dots,\ \tilde{f}_n^j(z)\right)$ ვექტორ ფუნქცია კვლავ $(1.2.1.)$ დიფერენციალური განტოლებების ამონახსნებისაგან შედგება და F - გაგრძელებამდე არსებული და $\tilde{F}_j$ გაგრძელების შედეგად მიღებული ამონახსნები ერთმანეთთან დაკავშირებულებია ტოლობით:

$$F = \tilde{F}_j M_j, \qquad (2.1.1.)$$

სადაც M_j კომპლექსურ მნიშვნელობიანი მუდმივი გადაუგვარებელი მატრიცებია $j = 1,\ \dots,\ m$.

განსაზღვრება 2.1.1.: M_j კომპლექსურ მნიშვნელობიან მუდმივ გადაუგვარებელ მატრიცები ლოკალური მონოდრომიები ეწოდებათ, $j = 1,\ \dots,\ m$.

ლოკალური მონოდრომიები იძლევიან საშუალებას გავნსაზღვროთ როგორ იცვლება $(1.2.1.)$ დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემის ამონახსნთა წრფივი სივრცის ერთი ბაზისი სხვა ბაზისით.

განსაზღვრება 2.1.2.: ლოკალური მნოდორმიებისაგან წარმოქმნილ ჯგუფს გლობალური მონოდრომია ეწოდება.

გლობალური მონოდრომია საზოგადოდ $GL(n,\mathbb{C})$-ს ქვეჯგუფია. ასახვას

$$\chi: \ \pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_m\}, z_0) \to GL(n,\mathbb{C}),$$
$$\chi([\gamma_i]) = M_i, \qquad i = 1, \ \dots, \ m \tag{2.1.2.}$$

მონოდრომიის წარმოდგენა ეწოდება, სადაც $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_m\}, z_0)$ აღნიშნავს $\gamma_1, \ \gamma_2, \ \dots, \ \gamma_m$ მარყუჟების ფუნდამენტურ ჯგუფს, $[\gamma_i]$ სიმბოლო γ_i მარყუჟის ჰომოტოპიის კლასია $i = 1, \ \dots, \ m$, ხოლო χ ასახვა კი არის ჯგუფებს შორის ანტიჰომომორფიზმი.

(1.2.7.) ფუქსის ტიპის განტოლებათა სისტემის შემთხვევაში $v = z - s_i$ უცნობთა გარდაქმნის გამოყენებით (1.2.7.) დიფერენციალურ განტოლებათა სისტემა მიიღებს სახეს:

$$v\frac{dx}{dv} = \left(A_i \ + \ v - \text{ს მრავალწევრი}\right)X(v). \tag{2.1.3.}$$

თუ დავუშვებთ, რომ A_i არის არარეზონანსული მუდმივი მატრიცა, მაშინ s_i განსაკუთრებული წერტილის შესაბამისი ლოკალური მონოდრომია გამოითვლება ფორმულით $e^{2\pi i A_i}$, $i = 1, \ \dots, \ m$.

∞ წერტილის შემთხვევაში თუ კვლავ ჩავატარებთ $w = \frac{1}{z}$ უცნობთა წრფივ გარდაქმნას და გავითვალისწინებთ, რომ

$$\frac{z}{z - s_i} = \frac{1}{1 - s_i w} = 1 + \frac{s_i w}{1 - s_i w}, \tag{2.1.4.}$$

მაშინ

$$wB(w) = -zA(z) = -\sum_{i=1}^{m} A_i \ + \ w - \text{ს მრავალწევრი}, \tag{2.1.5.}$$

აქედან გამომდინარე თუ $\sum_{i=1}^{m} A_i$ მუდმივი მატრიცა არარეზონონსულია, მაშინ ∞ განსაკუთრებული წერტილის შესაბამისი ლოკალური მონოდრომია გამოითვლება ფორმულით $e^{-2\pi i \sum_{i=1}^{m} A_i}$.

შენიშვნა 2.1.1.: რეზონანსული მატრიცების შემთხვევაში ლოკალური მონოდრომიის მატრიცები არიან $e^{2\pi i A_i}$ და $e^{2\pi i \sum_{i=1}^{m} A_i}$ მატრიცების შეუღლებული მატრიცები შესაბამისად სასრულ და უსასრულო წერტილებში, $i = 1, 2, \dots, m$.

ლოკალური მონოდრომიების საშუალებით გლობალური მონოდრომიის აღწერა სირთულეს წარმოადგენს, რადგან ყველა ლოკალური მონოდრომიის მატრიცა სხვადასხვა ბაზისთანაა დაკავშირებული. თუ ჯერ დავაფიქსირებთ ბაზისს, მაშინ ჩვენ მოგვიწევს ზემოთ გამოთვლილი ლოკალური მონოდრომიის მატრიცების შეუღლებული მატრიცების გამოყენება. მატრიცის შეუღლებული მატრიცის პოვნა კი არ არის მარტივი საქმე.

2. 2. ლოკალური და გლობალური მონოდრომიების ზოგადი დახასიათება

განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც $m = 2$ ე. ი. გვაქვს სამი განსაკუთრებული წერტილი s_1, s_2 და ∞. A_1 და A_2 მატრიცები შეესაბამებიან s_1 და s_2 განსაკუთრებულ წერტილებს, ხოლო $A_\infty = -A_1 - A_2$ კი ∞-ს. დავაფიქსიროთ z_0 წერტილი, λ_1, λ_2 და λ_∞ - სამი მარყუჟი, რომლებიც იწყებიან და მთავრდებიან z_0 წერტილიში და თითო-თითოჯერ შემოუვლიან s_1, s_2 და ∞ განსაკუთრებულ წერტილებს შესაბამისად. დავაფიქსიროთ z_0 მიდამო და ამ მიდამოში განსაზღვრული ამონახსნების ოჯახის $\mathbb{B}$ ბაზისი. s_1, s_2 და ∞ განსაკუთრებულ წერტილებთან დაკავშირებულია M_1, M_2 და M_∞ - სამი გადაუგვარებელი მატრიცა, რომლებსაც ამ წერტილებში ლოკალური მონოდრომიები ვუწოდეთ. ლოკალური მონოდრომიები აკმაყოფილებენ პირობას $M_\infty M_1 M_0 = I_2$, აქედან გამომდინარე $M_\infty = (M_1 M_0)^{-1}$. $\mathbb{B}^{\lambda_1} = M_1\mathbb{B}$, $\mathbb{B}^{\lambda_2} = M_2\mathbb{B}$ და $\mathbb{B}^{\lambda_\infty} = M_\infty\mathbb{B} = (M_1 M_0)^{-1}\mathbb{B}$ ვექტორ ფუნქციები შედგებიან $\mathbb{B}$ ბაზისის ამონახსნების შესაბამისად λ_1, λ_2 და λ_∞ წირების გასწვრივ გაგრძელებების შედეგად მიღებული წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნებისაგან. არარეზონანსულ შემთხვევაში $M_1 = e^{2\pi i A_1}$, $M_2 = e^{2\pi i A_2}$ და $M_\infty = e^{2\pi i A_\infty}$, ხოლო რეზონანსულ შემთხვევაში კი M_1, M_2 და M_∞ მუდმივი გადაუგვარებელი მატრიცები არიან $e^{2\pi i A_1}$, $e^{2\pi i A_2}$ და $e^{2\pi i A_\infty}$ მატრიცების შეუღლებული მატრიცები შესაბამისად.

გამონაკლისი - აბელური შემთხვევა: თუ მონოდრომიის ჯგუფი არის აბელის ჯგუფი, მაშინ შეუღლების პრობლემა ქრება. რამდენიმე შემთხვევაში აბელურობის პირობა გარანტირებულია. პირველი თუ $m = 0$, მაშინ $X' = 0$ და სისტემას აქვს ტრივიალური, კერძოდ ერთეულოვანი მონოდრომიები. თუ $m = 1$, მაშინ $\mathbb{CP}^1 \setminus \{s_1, \infty\} = \mathbb{C} \setminus \{s_1\}$-ის ფუნდამენტური ჯგუფი იზომორფულია $\mathbb{Z}$ მთელ რიცხვთა ჯგუფის და მონოდრომიის ჯგუფი წარმოქმნილია s_1 განსაკუთრებული წერტილის შესაბამისი $e^{2\pi i A_1}$ ლოკალური მონოდრომიის მატრიცისაგან ან რაც იგივეა ∞ განსაკუთრებული წერტილის შესაბამისი $e^{-2\pi i A_1}$ ლოკალური მონოდრომიის მატრიცისაგან. ანალოგიურად თუ $m = 2$ და ∞ არ არის განსაკუთრებული წერტილი, მაშინ $A_1 + A_2 = 0$, ხოლო s_1 და s_2 განსაკუთრებული წერტილების შესაბამისი ლოკალური მონოდრომიები წარმოქმნილებია $e^{2\pi i A_1}$ და $e^{2\pi i A_2}$ მატრიცებისაგან, ხოლო რადგან $e^{2\pi i A_2} = e^{-2\pi i A_1}$ გლობალური მონოდრომია კი ერთ-ერთი მათგანისგან არის წარმოქმნილი.

თუ $\mathrm{m} = 2$ და ∞ არის განსაკუთრებული წერტილი ან $\mathrm{m} \geq 3$, მაშინ $\mathbb{CP}^1 \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_m, \infty\} = \mathbb{C} \setminus \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$-ის ფუნდამენტური ჯგუფი კომუტაციურობისაგან შორსაა, არის ეგრედ წოდებული "m წარმომქმნელისაგან თავისუფალი ჯგუფი". მაგრამ თუ $\mathrm{n} = 1$, მაშინ $\mathrm{GL}(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^* = (\mathbb{C} \setminus \{0\}, *)$ არის კომუტაციური ჯგუფი გამრავლების მიმართ და მონოდრომიის ჯგუფიც კომუტაციურია. ეს შემთხვევა არის სკალარული შემთხვევა

$$f' = \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{z - s_i}\right) f, \qquad (2.2.1.)$$

მაშინ რეზონანსულობის პირობის მიუხედავად გლობალური მონოდრომია წარმოქმნილია $e^{2\pi i a_i}, k = 1, 2, \dots, m$ რიცხვებისაგან და აქედან გამომდინარე გამოდის $\mathbb{C}^*$-ის ქვეჯგუფი.

რომ შევაჯამოთ პირველი არატრივიალური ე. ი. არააბელური შემთხვევა გვექნება მაშინ, როდესაც $\mathrm{m} = 2$, ∞ განსაკუთრებული წერტილია და $\mathrm{n} = 2$. შევისწავლოთ ეს შემთხვევა.

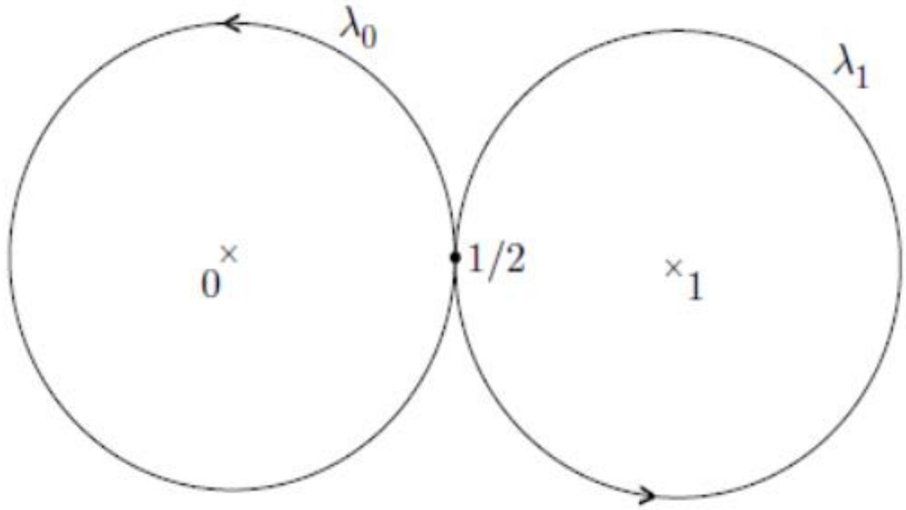
განსაზღვრება 2.2.1.: სკალარულ დიფერენციალურ განტოლებას ეწოდება ფუქსის თუ ის არის მერომორფულ კოეფიციენტებიანი და აქვს მხოლოდ რეგულარული განსაკუთრებული წერტილები.

შესაძლებელია დამტკიცდეს, რომ თუ $\mathrm{n} = 2$, $\mathrm{m} = 2$ და ∞ განსაკუთრებული წერტილია, მაშინ ყველა ფუქსის განტოლება დაყვანადია ჰიპერგეომეტრიულ განტოლებაზე.

პირველი არააბელური შემთხვევა: როგორც უკვე ვთქვით პირველი არატრივიალურ (არააბელურ) შემთხვევაში $\mathrm{n} = 2$, $\mathrm{m} = 2$ და ∞ განსაკუთრებული წერტილია. ზოგადობის შეუზღუდავად განსაკუთრებულ წერტილებად შეგვიძლია ავიღოთ 0 და 1, მაშინ მონოდრომიის წარმოდგენა იქნება ანტიჰომომორფიზმი $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{0, 1, \infty\}, z_0)$-სა და $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ჯგუფებს შორის.

ფუნდამენტური ჯგუფი ორ წარმომქმნელიანი თავისუფალი ჯგუფია ე. ი. ჯგუფის წარმომქმნელებზე არ არის არანაირი პირობა. ჯერ დავაფიქსიროთ z_0 წერტილი, λ_0 და λ_1

მარტივი შეკრული წირები, რომლებიც თითო-თითოჯერ შემოუვლიან შესაბამისად 0 და 1 განსაკუთრებულ წერტილებს საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით. ფუნდამენტური ჯგუფი იქნება λ_0 და λ_1 წირების ჰომოტოპიების კლასებისაგან წარმოქმნილი ჯგუფი. შეგვიძლია z_0 წერტილად ავიღოთ $\frac{1}{2} \in \mathbb{C}P^1 \setminus \{0,\ 1,\ \infty\}$, ხოლო λ_0 და λ_1 წირებად შემდეგი კონკრეტული წირები - $\lambda_0 = \frac{1}{2}e^{2\pi it}$ და $\lambda_1 = 1 - \frac{1}{2}e^{2\pi it}$, $t \in [0,\ 1]$.



ნახაზი 2.2.1.

მონოდრომიის წარმოდგენა $\pi_1\left(\mathbb{CP}^1 \setminus \{0,\ 1, \infty\}, \frac{1}{2}\right)$ და $GL_2(\mathbb{C})$-ში ჯგუფებს შორის მთლიანად ხასიათდება M_0 და M_1 მატრიცების საშუალებით $GL_2(\mathbb{C})$-დან, რომლებიც არიან $[\lambda_0]$ და $[\lambda_1]$ ჰომოტოპიის კლასების ანასახები. უფრო მეტიც, რადგან ფუნდამენტური ჯგუფის $[\lambda_0]$ და $[\lambda_1]$ ჰომოტოპიის კლასების წარმომქმნელი λ_0 და λ_1 წირები არიან დამოუკიდებელი წირები, ამის გამო M_0 და M_1 მატრიცები ნებისმიერად შეიძლება ავარჩიოთ. გლობალური მონოდრომია იქნება M_0 და M_1 მატრიცებით წარმოქმნილი ჯგუფი.

მონოდრომიის წარმოდგენის აღწერა დამოკიდებულია ბაზისის არჩევაზე $z_0 = \frac{1}{2}$ წერტილში. მონოდრომიით გამოწვეული ეფექტი თავმოყრილია $M_0,\ M_1,\ M_\infty \in GL_2(\mathbb{C})$ მატრიცებში ისე, რომ $\mathbb{B}^{\lambda_0} = M_0\mathbb{B}$, $\mathbb{B}^{\lambda_1} = M_1\mathbb{B}$ და $\mathbb{B}^{\lambda_\infty} = M_\infty\mathbb{B}$, სადაც λ_∞ რომელიღაც არჩეული წირია, რომელიც

ერთხელ შემოუვლის ∞ წერტილს საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით, ხოლო $\mathbb{B}$ სიმბოლო აღნიშნავს $z_0 = \frac{1}{2}$ წერტილში ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ამონახსნების ოჯახის ბაზისი. გასათვალისწინებელია, რომ $[\lambda_0]$, $[\lambda_1]$, $[\lambda_\infty]$ ჰომოტოპიის კლასები და მათთან დაკავშირებული M_0, M_1, M_∞ მონოდრომიის მატრიცები ერთმანეთზეა დამოკიდებული, კერძოდ $\lambda_0\lambda_1\lambda_\infty = I$ და $M_\infty M_1 M_0 = I_2$, აქედან გამომდინარე $M_\infty = (M_1 M_0)^{-1}$ და $\lambda_\infty = (\lambda_0\lambda_1)^{-1}$.

თავი III. ჰიპერგეომეტრიული განტოლება

3. 1. ჰიპერგეომეტრიული მწკრივები

განსაზღვრება 3.1.1.: ნებისმიერი $\alpha \in \mathbb{C}$ კომპლექსური რიცხვისა და n ნატურალური რიცხვისათვის პოხჰამერის სიმბოლო ეწოდება შემდეგ გამოსახულებას:

$$(\alpha)_n = \begin{cases} 1 & \text{თუ} \quad n = 0 \\ \alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1) & \text{თუ} \quad n \geq 1 \end{cases} \qquad (3.1.1.)$$

განსაზღვრება 3.1.2.: ჰიპერგეომეტრიული მწკრივი ეწოდება ხარისხოვან მწკრივს

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{n!\,(\gamma)_n} z^n = \sum_{n\geq 0} \frac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n} z^n \qquad (3.1.2.)$$

სადაც $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{C}$.

საჭიროა მოვითხოვოთ $\gamma \notin -\mathbb{N}$ იმისათვის, რომ წილადის მნიშვნელი არ გახდეს ნული. აგრეთვე უნდა მოვითხოვოთ, რომ $\alpha,\ \beta \notin -\mathbb{N}$ იმისათვის, რომ ხარისხოვანი მწკრივი არ გამოვიდეს პოლინომიალური. მსჯელობის ბოლოს კი აღვნიშნოთ, რომ საჭიროა $\gamma,\ \alpha-\beta,\ \gamma-\alpha-\ \beta \notin -\mathbb{N}$, ამ შემთხვევებისათვის შევისწავლით საკითხებს. შემოვიღოთ აღნიშვნა:

$f_n = \dfrac{(\alpha)_n(\beta)_n}{(1)_n(\gamma)_n},\ n \geq 0,$ ამის გათვალისწინებით მივიღებთ ტოლობას $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) = \sum\limits_{n\geq 0} f_n z^n.$

ჰიპერგეომეტრიული განტოლების კოეფიციენტები აკმაყოფილებენ პირობას

$$\frac{f_{n+1}}{f_n} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)} \quad \text{და} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f_{n+1}}{f_n} = 1. \qquad (3.1.3.)$$

ჰიპერგეომეტრიული მწკრივის კრებადობის რადიუსი არის 1.

ჰიპერგეომეტრიული მწკრივი დაკავშირებულია ე. წ. გამა ფუნქციასთან, რომელიც ანალიზური ფუნქციაა და განისაზღვრება ასეთი წესით:

$$\Gamma(z)=\int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt; \quad z\in\mathbb{C},\ Re(z)>0. \tag{3.1.4.}$$

ნაწილობითი ინტეგრების ფორმულის საშუალებით მიიღება ფორმულა $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$, მართლაც:

$$\Gamma(z+1)=\int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{z}dt=e^{-t}t^{z}|_{0}^{+\infty}+\int_{0}^{+\infty} ze^{-t}t^{z-1}dt=\lim_{t\to\infty} e^{-t}t^{z}-(-e^{-0}0^{z})+z\int_{0}^{+\infty} e^{-t}t^{z-1}dt=$$

$$=0-0+z\Gamma(z)=z\Gamma(z). \tag{3.1.5.}$$

აღნიშნული ფორმულის გამოყენებით მიიღება კიდევ ერთი ფორმულა, რომელიც დაკავშირებულია Γ ფუნქციასთან

$$\Gamma(z)=\frac{1}{(z)_n}\Gamma(z+n); \quad n\in\mathbb{N},\ Re(z+n)>0, \tag{3.1.6.}$$

აქედან გამომდინარეობს, რომ

$$(z)_n=\frac{\Gamma(z+n)}{\Gamma(z)}; \quad n\in\mathbb{N},\ Re(z+n)>0. \tag{3.1.7.}$$

თუ ბოლოს მიღებულ ფორმულას გამოვიყენებთ α, β და γ პარამეტრებისათვის მივიღებთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის გამოსათვლელ ფორმულას Γ ფუნქციის გამოყენებით:

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\sum_{n\geq 0}\frac{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\beta)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\gamma)}z^{n},$$

სადაც

$$\Gamma(1)=\int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt=1, \tag{3.1.8.}$$

$$\Gamma(n)=(n-1)!,\quad n\geq 1. \tag{3.1.9.}$$

3. 2. ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ამონახსნების გაგრძელებები

სანამ დავიწყებთ ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ამონახსნების განსაკუთრებული წერტილების მიდამოებში გაგრძელებების მიმოხილვას რამდენიმე აღნიშვნა შემოვიღოთ.

$$\delta = z\frac{d}{dz} - \text{ ზოგჯერ უწოდებენ ეილერის დიფერენცირების ოპერატორს,} \qquad (3.2.1.)$$

$$D = \frac{d}{dz} - \text{ ჩვეულებრივი დიფერენცირების ოპერატორი,} \qquad (3.2.2.)$$

აღნიშნული ოპერატორები აკმაყოფილებენ პირობას:

$$\delta(fg) = f\delta(g) + \delta(f)g \ \text{ და } \ D(fg) = fD(g) + D(f)g \qquad (3.2.3.)$$

თუ დავაკვირდებით დავინახავთ, რომ ზემოთ მოყვანილ ოპერატორებს შორის არსებობს კავშირი: $\delta = zD$ და ამის გამო $D = z^{-1}\delta$. აქედან გამომდინარე, მივიღებთ:

$$\delta^2 = \delta(\delta) = \delta(zD) = z\frac{d}{dz}\left(z\frac{d}{dz}\right) = z\left(z\frac{d^2}{dz^2} + \frac{d}{dz}\right) = z^2\frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz} = z^2D^2 + zD \qquad (3.2.4.)$$

და

$$D^2 = D(D) = D(z^{-1}\delta) = \frac{d}{dz}(z^{-1}\delta) = -z^{-2}\delta + z^{-1}\frac{d}{dz}(\delta) = -z^{-2}\delta + z^{-1}\left(z^{-1}z\frac{d}{dz}(\delta)\right) =$$

$$= -z^{-2}\delta + z^{-2}\left(z\frac{d}{dz}(\delta)\right) = -z^{-2}\delta + z^{-2}\big(\delta(\delta)\big) = z^{-2}\delta^2 - z^{-2}\delta. \qquad (3.2.5.)$$

შედეგად მიიღება ფორმულების მიმდევრობა, რომლებიც წარმოადგენენ კავშირს ჩვეულებრივ დიფერენცირების ოპერატორსა და ეილერის დიფერენცირების ოპერატორს შორის:

$$\begin{cases} zD = \delta \\ z^2D^2 = \delta^2 - \delta \\ z^2D^2 = \delta^3 - 3\delta^2 + 2\delta \\ \quad\vdots \end{cases} \quad \text{და} \quad \begin{cases} \delta = zD \\ \delta^2 = z^2D^2 + zD \\ \delta^3 = z^3D^3 + 3z^2D^2 + zD \\ \quad\vdots \end{cases} \qquad (3.2.6.)$$

ამის გათვალისწინებით მივიღებთ, რომ:

$$\delta\left(\sum f_n z^n\right) = \sum n f_n z^n \quad \text{და} \quad \delta^2\left(\sum f_n z^n\right) = \sum n^2 f_n z^n. \qquad (3.2.7.)$$

თუ გავითვალისწინებთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის კოეფიციენტებს შორის კავშირს $(n+1)(n+\gamma)f_{n+1} = (n+\alpha)(n+\beta)f_n$ მივიღებთ ტოლობებს:

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+\gamma)f_{n+1}z^{n+1} = \sum_{n\geq 0}(n+\alpha)(n+\beta)f_n z^{n+1}, \qquad (3.2.8.)$$

ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის კოეფიციენტებს შორის კავშირის გამო სამართლიანია შემდეგი გარდაქმნები:

$$(n+1)(n+\gamma) = (n+1)(n+1+\gamma-1) = (n+1)^2 + (n+1)(\gamma-1) \qquad (3.2.9.)$$

$$(n+\alpha)(n+\beta) = n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta, \qquad (3.2.10.)$$

ამ გარდაქმნების გამოყენებით მიიღება ტოლობები:

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)(n+\gamma)f_{n+1}z^{n+1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)^2 f_{n+1}z^{n+1} + \sum_{n\geq 0}(n+1)(\gamma-1)f_{n+1}z^{n+1} =$$

$$= \delta^2\left(\sum f_{n+1}z^{n+1}\right) + (\gamma-1)\delta\left(\sum f_{n+1}z^{n+1}\right), \qquad (3.2.11.)$$

$$\sum_{n\geq 0}(n+\alpha)(n+\beta)f_n z^{n+1} = \sum_{n\geq 0} n^2 f_n z^{n+1} + \sum_{n\geq 0}(\alpha+\beta)n f_n z^{n+1} + \sum_{n\geq 0}\alpha\beta f_n z^{n+1} =$$

$$= z\left(\sum_{n\geq 0} n^2 f_n z^n + \sum_{n\geq 0}(\alpha+\beta)n f_n z^n + \sum_{n\geq 0}\alpha\beta f_n z^n\right) =$$

$$= z\left(\delta^2\left(\sum f_n z^n\right) + (\alpha+\beta)\delta\left(\sum f_n z^n\right) + \sum_{n\geq 0}\alpha\beta f_n z^n\right). \qquad (3.2.12.)$$

ე. ი.

$$\sum_{n\geq 0}(n+1)^2 f_{n+1}z^{n+1} + \sum_{n\geq 0}(n+1)(\gamma-1)f_{n+1}z^{n+1} =$$

$$= z\left(\sum_{n\geq 0} n^2 f_n z^n + \sum_{n\geq 0}(\alpha+\beta)n f_n z^n + \sum_{n\geq 0}\alpha\beta f_n z^n\right). \qquad (3.2.13.)$$

საბოლოოდ მივიღებთ ტოლობას:

$$(\delta^2 + (\gamma - 1)\delta)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) = z(\delta^2 + (\alpha + \beta)\delta + \alpha\beta)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z). \qquad (3.2.14.)$$

თუ გავამარტივებთ გამოსახულებებს მივიღებთ ტოლობებს:

$$(1 - z)\delta^2 F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) + \big((\gamma - 1) - (\alpha + \beta)z\big)\delta F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) - \alpha\beta z F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) = 0, \qquad (3.2.15.)(A)$$

ხოლო ჩვეულებრივი დიფერენცირების ოპერატორის გამოყენებით ბოლო ტოლობა გადაიწერება შემდეგი სახით:

$$(1 - z)(z^2 D^2 + zD)F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) + \big((\gamma - 1) - (\alpha + \beta)z\big)zDF(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) - \alpha\beta z F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) = 0$$

$$z^2(1 - z)D^2 F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) + z(1 - z)DF(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) + (\gamma - 1)zDF(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) \\ - (\alpha + \beta)z^2 DF(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) - \alpha\beta z F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) = 0$$

თუ გავამარტივებთ გამოსახულებას საბოლოოდ მივიღებთ ტოლობას

$$z(1 - z)D^2 F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)DF(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) - \alpha\beta F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) = 0. \qquad (3.2.16.)(B)$$

ეს ტოლობები საჭიროა ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ამონახსნების განსაკუთრებული წერტილების მიდამოებში ლოკალური და გლობალური ყოფაქცევების დასახასიათებლად.

გავითვალისწინოთ, რომ 0, 1 და ∞ წერტილების შესაბამისი ლოკალური ექპონენტები არიან შემდეგი კომპლექსური რიცხვები:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \infty \\ 0 & 0 & \alpha \\ \\ 1 - \gamma & \gamma - \alpha - \beta & \beta \end{pmatrix} \qquad (3.2.17.)$$

პირველ სტრიქონში წერია ჰიპერგეომეტრიული განტოლების განსაკუთრებული წერტილები, ხოლო მეორე და მესამე სტრიქონებში კი ამ განსაკუთრებული წერტილების შესაბამისი ლოკალური ექპონენტები იმყოფებიან.

პირველად შევისწავლოთ ამონახსნები $z = 0$ განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში დავაკვირდეთ მარტივი შეკრული წირების გასწვრივ მათი გაგრძელებების შედეგად მიღებულ ამონახსნებს. დავაკვირდეთ $(3.2.15.)(\mathrm{A})$ ფორმას. $z = 0$ წერტილში მახასიათებელი განტოლება არის ასეთი სახის $x^2 + (\gamma - 1)x = 0$, რის გამოც $z = 0$ წერტილის შესაბამისი ლოკალური ექსპონენტები არიან რიცხვები 0 და $\gamma - 1$. თუ ჩვენ დავუშვებთ, რომ $\gamma \notin \mathbb{Z}$, მაშინ განსახილველი გვექნება არარეზონანსული შემთხვევა. აქედან გამომდინარე ამონახსნთა სივრცის ბაზისი შედგება ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნისაგან, რომელთაგან ერთი არის $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ z)$ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია, ხოლო მეორე არის $z^{1-\gamma}G(z)$ სახის ფუნქცია, სადაც $G(z)$ არის ხარისხოვანი მწკრივი. თუ გამოვიყენებთ გარდაქმნას

$$\delta\big(z^{1-\gamma}G(z)\big) = z\frac{d}{dz}\big(z^{1-\gamma}G(z)\big) = z\left((1-\gamma)z^{-\gamma}G(z) + z^{1-\gamma}\frac{dG(z)}{dz}\right) =$$
$$= (1-\gamma)z^{1-\gamma}G(z) + z^{1-\gamma}z\frac{dG(z)}{dz} = (1-\gamma)z^{1-\gamma}G(z) + z^{1-\gamma}\delta\big(G(z)\big) =$$
$$= z^{1-\gamma}\Big((1-\gamma)G(z) + \delta\big(G(z)\big)\Big) = z^{1-\gamma}\big((1-\gamma)+\delta\big)\big(G(z)\big). \qquad (3.2.18.)$$

გამოვა, რომ $G(z)$ არის ამონახსნი ასეთი განტოლების:

$$(1-z)\big((1-\gamma)+\delta\big)^2G + \big((\gamma-1)-(\alpha+\beta)z\big)\big((1-\gamma)+\delta\big)G - \alpha\beta zG = 0, \qquad (3.2.19.)$$

თუ გავამარტივებთ გამოსახულებას მივიღებთ ტოლობას:

$$(1-z)\delta^2G + \big((1-\gamma)-(\alpha+\beta+2-2\gamma)z\big)\delta G - (\alpha+1-\gamma)(\beta+1-\gamma)zG = 0, \qquad (3.2.20.)$$

ე. ი. მივიღებთ ჰიპერგეომეტრიულ განტოლებას $\alpha+1-\gamma,\ \ \beta+1-\gamma,\ \ 2-\gamma,$ პარამეტრებისათვის, რომლის ამონახსნიცაა $F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma;\ z)$ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია. ამის გამო გამოდის, რომ $G(z) = F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma;\ z)$. ე. ი. ამონახსნთა სივრცის ბაზისი არის ასეთი ვექტორ ფუნქცია:

$$\mathbb{B}_0 = \big(F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z),\ z^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma;\ z)\big). \qquad (3.2.21.)$$

λ_0 წირის გასწვრივ გაგრძელების შედეგად წარმოქმნილ მონოდრომიის მატრიცას აქვს სახე:

$$M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i\gamma} \end{pmatrix}. \qquad (3.2.22.)$$

ახლა შევისწავლოთ ამონახსნები $z=1$ განსაკუთრებული წერტილის მიდამოში. ამ შემთხვევაში კარგი იქნება გამოვიყენოთ ლოკალური კოორდინატები, რომლებიც ქრება $z=1$ წერტილის სიახლოვეში. ამისათვის საჭიროა შემოვიღოთ $v=1-z$ ცვლადის გარდაქმნა, რის შედეგადაც ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია მიიღებს სახეს $F(\alpha,\beta,\gamma;z)=G(v)$, z და v ცვლადების მიმართ დიფერენცირების ოპერატორებს შორის არსებობს კავშირი $D_v=-D_z$ და $D_z^2=D_v^2$, შედეგად მიიღება ტოლობები $F'(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)=-G'(v)$ და $F''(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)=G''(v)$.

დავაკვირდეთ (3.2.16.)(B) ფორმას, $z=1$ წერტილში მახასიათებელი განტოლება არის ასეთი სახის: $x^2+(\gamma-\alpha-\beta)x=0$ და ამის გამო $z=1$ წერტილის შესაბამისი ლოკალური ექსპონენტები არიან რიცხვები 0 და $\gamma-\alpha-\beta$. თუ ჩვენ დავუშვებთ, რომ $\gamma-\alpha-\beta\notin\mathbb{Z}$, მაშინ განსახილველი გვექნება არარეზონანსული შემთხვევა. აქედან გამომდინარე ამონახსნთა სივრცის ბაზისი შედგება ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნისაგან, რომელთაგან ერთი არის $F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma;\ 1-z)$ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია, ხოლო მეორე არის $(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}G(1-z)$ სახის ფუნქცია, სადაც $G(1-z)$ არის ხარისხოვანი მწკრივი, რომელიც არის

$$z(1-z)D_{1-z}^2G+\big((\alpha+\beta+1-\gamma)-(\alpha+\beta+1)(1-z)\big)D_{1-z}G-\alpha\beta G=0, \qquad (3.2.23.)$$

ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ამონახსნი ჩაწერილი ახალ კოორდინატთა სისტემაში და რომლის ამონახსნიცაა $F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma+1-\alpha-\beta;\ 1-z)$ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია.

ამის გამო ამონახსნთა სივრცის ბაზისი გამოდის შემდეგი ვექტორ ფუნქცია:

$$\mathbb{B}_1=\Big(F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma;\ 1-z),\ (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\beta,\ \gamma-\alpha,\ \gamma+1-\alpha-\beta;\ 1-z)\Big) \quad (3.2.24.)$$

λ_1 წირის გასწვრივ გაგრძელების შედეგად წარმოქმნილ მონოდრომიის მატრიცას აქვს სახე:

$$M_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\end{pmatrix}. \qquad (3.2.25.)$$

ბოლოს დავაკვირდეთ ამონახსნებს $z=\infty$ განსაკუთრებული წერტილის სიახლოვეში. შევცვალოთ ცვლადი

$$w=\frac{1}{z} \qquad (3.2.26.)$$

ცვლადით და ყველაფერი გადავწეროთ ახალ კოორდინატებში. შედეგად ჰიპერგეომეტრიული ფუნქცია მიიღებს სახეს $F(\alpha, \beta, \gamma; z) = G(w)$, z და w ცვლადების მიმართ ეილერის დიფერენცირების ოპერატორებს შორის არსებობს კავშირი $\delta_w = -\delta_z$ და $\delta_w^2 = \delta_z^2$, გარდა ამისა სრულდება ტოლობა $zF'(\alpha, \beta, \gamma; z) = -wG'(w)$.

დავაკვირდეთ (3.2.15.)(A) ფორმას, $z = \infty$ წერტილში მახასიათებელ განტოლებას აქვს სახე $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$. ამის გამო $z = \infty$ წერტილის შესაბამისი ლოკალური ექსპონენტები არიან რიცხვები α და β. თუ ჩვენ დავუშვებთ, რომ $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$, მაშინ განსახილველი გვექნება არარეზონანსული შემთხვევა. აქედან გამომდინარე ამონახსნთა სივრცის ბაზისი შედგება ორი წრფივად დამოუკიდებელი ამონახსნისაგან, რომლებიც არიან $w^\alpha G_1$ და $w^\beta G_2$ სახის ფუნქციები, სადაც G_1 და G_2 არიან ხარისხოვანი მწკრივები. თუ გამოვიყენებთ გარდაქმნას

$$\delta_w\big(w^t G(w)\big) = w\frac{d}{dw}\big(w^t G(w)\big) = w\left(tw^{t-1}G(w) + w^t\frac{dG(w)}{dw}\right) =$$

$$= tw^tG(w) + w^t w\frac{dG(w)}{dw} = tw^tG(w) + w^t\delta_w\big(G(w)\big) = w^t\Big(tG(w) + \delta_w\big(G(w)\big)\Big) =$$

$$= w^t(t + \delta_w)\big(G(w)\big). \qquad (3.2.27.)$$

თუ t-ს ნაცვლად ჩავსვავთ α და β მნიშვნელობებს გამოვა, რომ $G(w)$ არის ასეთი განტოლებების ამონახსნები:

როდესაც $t = \alpha$:

$$(1 - w)(\alpha + \delta_w)^2 G - \big((\alpha + \beta) - (\gamma - 1)w\big)(\alpha + \delta_w)G + \alpha\beta G = 0, \qquad (3.2.28.)$$

თუ გავამარტივებთ გამოსახულებას მივიღებთ ტოლობას:

$$(1 - w)\delta_w^2 G + \big((\alpha - \beta) - (2\alpha - \gamma + 1)w\big)\delta_w G - \alpha(\alpha - \gamma + 1)wG = 0, \qquad (3.2.29.)$$

როდესაც $t = \beta$:

$$(1 - w)(\beta + \delta_w)^2 G - \big((\alpha + \beta) - (\gamma - 1)w\big)(\beta + \delta_w)G + \alpha\beta G = 0, \qquad (3.2.30.)$$

თუ გავამარტივებთ გამოსახულებას მივიღებთ ასეთი ტოლობა:

$$(1 - w)\delta_w^2 G + \big((\beta - \alpha) - (2\beta - \gamma + 1)w\big)\delta_w G - \beta(\beta - \gamma + 1)wG = 0, \qquad (3.2.31.)$$

ე. ი. მიიღება ჰიპერგეომეტრიული განტოლებები $\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1$ და $\beta, \beta-\gamma+1, \beta-\alpha+1$, პარამეტრებისათვის შესაბამისად, რომლების ამონახსნებიცაა $F(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1;\ w)$ და $F(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1;\ w)$ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციები შესაბამისად. ამის გამო გამოდის, რომ $G_1(w)=F(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1;\ w)$ და $G_2(w)=F(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1;\ w)$. ე. ი. ამონახსნთა სივრცის ბაზისი არის შემდეგი სახის ვექტორ ფუნქციები:

ახალ კოორდინატთა სისტემაში:

$$\mathbb{B}_\infty=\left(w^{\alpha}F(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1;\ w),\ w^{\beta}F(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1;\ w)\right), \quad (3.2.32.)$$

საწყის კოორდინატთა სისტემაში:

$$\mathbb{B}_\infty=\left(z^{-\alpha}F(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1;\ z^{-1}),\ z^{-\beta}F(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1;\ z^{-1})\right). \quad (3.2.33.)$$

λ_∞ წირის გასწვრივ გაგრძელების შედეგად წარმოქმნილ მონოდრომიის მატრიცას აქვს სახე:

$$M_\infty=\begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\beta} \end{pmatrix}. \quad (3.2.34.)$$

თავი IV. გლობალური მონოდრომია რიმანის აზრით აზრით

4. 1. სხვადასხვა ბაზისთან დაკავშირებული მონოდრომიის ჯგუფის წარმომქმნელები

ჰიპერგეომეტრიული განტოლების მონოდრომიის ჯგუფის წარმომქმნელების მოძებნაში შესაძლებელია გამოვიყენოთ სხვადასხვა ბაზისთან დაკავშირებული სხვადასხვა მონოდრომიები. განვიხილოთ ერთიდაიგივე z_0 წერტილთან დაკავშირებული დიფერენციალური განტოლების ამონახსნთა სივრცის სამი ბაზისი $\mathbb{B}_0$, $\mathbb{B}_1$ და $\mathbb{B}_\infty$, რომელთაგან თითოეული გრძელდება მარტივი შეკრული წირის გასწვრივ, რომლებიც ერთხელ შემოვულიან 0, 1 და ∞ განსაკუთრებულ წერტილებს საათის ისრის მოძრაობის საწინააღმდეგო მიმართულებით შესაბამისად და ამ ბაზისების წრფივი გარდაქმნების შედეგად მიღებული ბაზისები C_0, C_1 და C_∞.

$$C_0 = \mathbb{B}_0 D_0 = \left(p_0 F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z),\ q_0 z^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \gamma,\ 2 - \gamma;\ z)\right) = (F_0,\ G_0) \quad (4.1.1.)$$

$$\begin{aligned} C_1 = \mathbb{B}_1 D_1 &= \left(p_1 F(\alpha,\ \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma; 1 - z),\ q_1 (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta,\ \gamma - \alpha, \gamma + 1 - \alpha - \beta; 1 - z)\right) \\ &= (F_1,\ G_1), \end{aligned} \quad (4.1.2.)$$

$$\begin{aligned} C_\infty = \mathbb{B}_\infty D_\infty &= \left(p_\infty z^{-\alpha} F(\alpha,\ \alpha - \gamma + 1,\ \alpha - \beta + 1;\ z^{-1}),\ q_\infty z^{-\beta} F(\beta,\ \beta - \gamma + 1,\ \beta - \alpha + 1;\ z^{-1})\right) \\ &= (F_\infty,\ G_\infty), \end{aligned} \quad (4.1.3.)$$

სადაც $D_i = \begin{pmatrix} p_i & 0 \\ 0 & q_i \end{pmatrix}$, $p_i,\ q_i \in \mathbb{C}^*$, უცნობი მუდმივი გადაუგვარებელი მატრიცებია $i \in \{0,\ 1,\ \infty\}$.

ყველა ფუნქციას განვიხილავთ:

$$\Omega = \mathbb{CP}^1 \setminus ([\infty,\ 0] \cup [1,\ \infty]) = \mathbb{C} \setminus (]-\infty,\ 0] \cup [1,\ +\infty[) \quad (4.1.4.)$$

მარტივ ბმულ არეზე.

დავაკვირდეთ როგორ იწერება ერთ ბაზისში ჩაწერილი ამონახსნები სხვა ბაზისში:

$$F_0 = a_1F_1 + b_1G_1 = a_\infty F_\infty + b_\infty G_\infty, \qquad (4.1.5.)$$

$$G_0 = c_1F_1 + d_1G_1 = c_\infty F_\infty + d_\infty G_\infty, \qquad (4.1.6.)$$

მატრიცების ტერმინებში:

$$\begin{pmatrix} F_0 \\ G_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1 \\ G_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_\infty \\ G_\infty \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_\infty & c_\infty \\ b_\infty & d_\infty \end{pmatrix}, \qquad (4.1.7.)$$

ე. ი. $C_0 = C_1P_1 = C_\infty P_\infty$, სადაც $C_0 = \begin{pmatrix} F_0 \\ G_0 \end{pmatrix}$, $C_1 = \begin{pmatrix} F_1 \\ G_1 \end{pmatrix}$, $C_\infty = \begin{pmatrix} F_\infty \\ G_\infty \end{pmatrix}$, ხოლო $P_1 = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$ და $P_\infty = \begin{pmatrix} a_\infty & c_\infty \\ b_\infty & d_\infty \end{pmatrix}$ გადაუგვარებელი მატრიცები არიან ამონახსნთა წრფივი სივრცის ერთი ბაზისიდან მეორე ბაზისზე გადასვლის მატრიცები (ამონახსნების გადაბმის ან ბმულობის მატრიცებია). ამ ამონახსნთა სივრცის $\mathbb{B}_0$, $\mathbb{B}_1$ და $\mathbb{B}_\infty$ ბაზისის ვექტორებისაგან შედგენილი ვექტორ-ფუნქციების λ_0, λ_1 და λ_∞ წირების გასწვრივ გაგრძელებების შედეგად მიღებული ამონახსნები არიან შემდეგი ვექტორ ფუნქციები:

$$\mathbb{B}_0^{\lambda_0} = \mathbb{B}_0M_0, \text{ სადაც } M_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i\gamma} \end{pmatrix}, \qquad (4.1.8.)$$

$$\mathbb{B}_1^{\lambda_1} = \mathbb{B}_1M_1, \text{ სადაც } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)} \end{pmatrix}, \qquad (4.1.9.)$$

$$\mathbb{B}_\infty^{\lambda_\infty} = \mathbb{B}_\infty M_\infty, \text{ სადაც } M_\infty = \begin{pmatrix} e^{2\pi i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{2\pi i\beta} \end{pmatrix}, \qquad (4.1.10.)$$

ყველა ეს ბაზისი არის მათთან დაკავშირებული მონოდრომიის მატრიცების საკუთრივი ვექტორების ბაზისი. ეს ნათქვამი არსებითად მომდინარეობს იმ ფაქტიდან, რომ B_i და C_i მატრიცასთან დაკავშირებული D_i მატრიცა კომუტირებს M_i მატრიცასთან, $i \in \{0,\ 1,\ \infty\}$. გარდა ამისა ლოკალური მონოდრომიები დაკავშირებულია C_0, C_1 და C_∞ ბაზისებთანაც და მათი λ_0, λ_1 და λ_∞ წირების გასწვრივ გაგრძელებების შედეგად მიღებულ ამონახსნებთანაც:

$$C_i^{\lambda_i} = C_iM_i = (\mathbb{B}_iD_i)M_i = \mathbb{B}_i(D_iM_i) = \mathbb{B}_i(M_iD_i), \qquad (4.1.11.)$$

$$D_iM_i = \begin{pmatrix} p_i & 0 \\ 0 & q_i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i & 0 \\ 0 & q_ir \end{pmatrix} \text{ და } M_iD_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_i & 0 \\ 0 & q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_i & 0 \\ 0 & rq_i \end{pmatrix}, \qquad (4.1.12.)$$

სადაც ჩვენს შემთხვევაში $r = \{e^{-2\pi i\gamma},\ e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)},\ e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\}$, ხოლო $i \in \{0,\ 1,\ \infty\}$.

თუ გავითვალისწინებთ, რომ $C_0 = C_1P_1 = C_\infty P_\infty$ ან რაც იგივეა $C_1 = C_0P_1^{-1}$ და $C_\infty = C_0P_\infty^{-1}$, მაშინ C_0-ის λ_0, λ_1 და λ_∞ წირების გასწვრივ გაგრძელებებისათვის მივიღებთ შემდეგ დამოკიდებულებებს:

$$C_0^{\lambda_1} = (C_1P_1)^{\lambda_1} = C_1^{\lambda_1}P_1 = (C_1M_1)P_1 = C_1M_1P_1 = (C_0P_1^{-1})M_1P_1 = C_0(P_1^{-1}M_1P_1), \quad (4.1.13.)$$

$$C_0^{\lambda_\infty} = (C_\infty P_\infty)^{\lambda_\infty} = C_\infty^{\lambda_\infty}P_\infty = (C_\infty M_\infty)P_\infty = C_\infty M_\infty P_\infty = (C_0P_\infty^{-1})M_\infty P_\infty = C_0(P_\infty^{-1}M_\infty P_\infty). \quad (4.1.14.)$$

თუ ჩვენ განვსაზღვრავთ P_1 და P_∞ მატრიცებს, მაშინ რადგან $\lambda_\infty = (\lambda_0\lambda_1)^{-1}$ ამის გამო შესაძლებელი იქნება C_0-თან დაკავშირებული მონოდრომიის ჯგუფის აღწერა, რომელიც წარმოქმნილია M_0, $P_1^{-1}M_1P_1$ და $P_\infty^{-1}M_\infty P_\infty$ მატრიცების საშუალებით, რადგან ამ პირობებში შესრულდება ტოლობა

$$(P_\infty^{-1}M_\infty P_\infty)(P_1^{-1}M_1P_1)M_0 = I_2. \quad (4.1.15.)$$

შემდეგ თავში ჩვენ უნდა ვიპოვოთ $\mathbb{B}_0$ და $\mathbb{B}_\infty$ ბაზისებთან დაკავშირებული ბმულობის მატრიცები. ჩვენ აქ უბრალოდ ვიპოვეთ C_0, C_1 და C_∞ არაცხად ბაზისებთან დაკავშირებული ბმულობის მატრიცები, რადგან ჩვენთვის უცნობია D_0, D_1 და D_∞. შედეგი არის ის, რომ მოცემული ამონახსნის შემთხვევაში მონოდრომიის გამოთვლა არ არის შესაძლებელი, რადგან ჩვენ არ შეგვიძლია გამოვსახოთ ამონახსნები $\mathbb{B}_0$, $\mathbb{B}_1$ და $\mathbb{B}_\infty$ ბაზისებში.

თეორემა 4.1.1.: ჰიპერგეომეტრიული განტოლების მონოდრომიის ჯგუფი წარმოიქმნება M_0, $P_1^{-1}M_1P_1$ და $P_\infty^{-1}M_\infty P_\infty$ ერთიდაიგივე ბაზისთან დაკავშირებული მუდმივი გადაუგვარებელი მატრიცების საშუალებით, რომლებიც აკმაყოფილებენ პირობას $(P_\infty^{-1}M_\infty P_\infty)(P_1^{-1}M_1P_1)M_0 = I_2$.

დამტკიცება: $\pi_1(\mathbb{C}P^1 \setminus \{0,\ 1, \infty\}, z_0)$ - დიფერენციალური განტოლების ფუნდამენტური ჯგუფი წარმოქმნილია λ_0, λ_1 და λ_∞ დადებითად ორიენტირებული მარტივი შეკრული წირების საშუალებით, რომლებიც ერთ განცალკევებულ განსაკუთრებულ წერტილს შემოუვლის ერთხელ. თუ დავაკვირდებით $C_0^{\lambda_1}$ და $C_0^{\lambda_\infty}$ ფუნქციებს ისინი გამოდიან ჰიპერგეომეტრიული განტოლების ამონახსნის გაგრძელების შედეგად მიღებული ამონახსნები ჩაწერილი C_0 ბაზისში და ამის გამო M_0, $P_1^{-1}M_1P_1$ და $P_\infty^{-1}M_\infty P_\infty$ მატრიცები გამოდიან ლოკალური მონოდრომიები და რადგან $\lambda_\infty\lambda_1\lambda_0 = 1$ ამის გამო გამოდის, რომ $(P_\infty^{-1}M_\infty P_\infty)(P_1^{-1}M_1P_1)M_0 = I_2$,

ხოლო ამის გამო ისინი გამოდიან ჰიპერგეომეტრიული განტოლების მონოდრომიის ჯგუფის წარმომქმნელები.

4. 2. ბმულობის ფორმულა

ზემოთ ჩვენ განვიხილეთ ანალიზური გაგრძელება $\lambda_1 = \lambda_0^{-1}\lambda_\infty^{-1}$ წირის გასწვრივ. მაგალითად ბმულობის პირველ ფორმულაში:

$$F_0 = a_1F_1 + b_1G_1 = a_\infty F_\infty + b_\infty G_\infty, \qquad (4.2.1.)$$

$a_1F_1 + b_1G_1$ შუა გამოსახულება λ_1 წირის გასწვრივ გაგრძელების შედეგად გადავა $a_1F_1 + b_1e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}G_1$ გამოსახულებაში. მეორე მხრივ $F_0 = a_\infty F_\infty + b_\infty G_\infty$ გამოსახულება, რომელიც არ იცვლება λ_0^{-1} წირის გასწვრივ გაგრძელების შედეგად, გადავა $a_\infty e^{-2\pi i\alpha}F_\infty + b_\infty e^{-2\pi i\beta}G_\infty$ გამოსახულებაში λ_∞^{-1} წირის გასწვრივ გაგრძელებისას და საბოლოოდ მიიღება ახალი ფორმულა:

$$a_1F_1 + b_1e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}G_1 = a_\infty e^{-2\pi i\alpha}F_\infty + b_\infty e^{-2\pi i\beta}G_\infty. \qquad (4.2.2.)$$

ანალოგირად თუ მოვიქცევით

$$G_0 = c_1F_1 + d_1G_1 = c_\infty F_\infty + d_\infty G_\infty, \qquad (4.2.3.)$$

ბმულობის მეორე ფორმულის შემთხვევაში და გავითვალისწინებთ, რომ G_0 გამრავლდება $e^{2\pi i\gamma}$ მამრავლზე λ_0^{-1} წირის გასწვრივ გაგრძელებისას, შედეგად მიიღება კიდევ ერთი ტოლობა

$$a_1F_1 + b_1e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}G_1 = e^{2\pi i\gamma}\left(a_\infty e^{-2\pi i\alpha}F_\infty + b_\infty e^{-2\pi i\beta}G_\infty\right). \qquad (4.2.4.)$$

განვიხილოთ $\sigma \in \mathbb{C}$ ნებისმიერი კომპლექსური რიცხვი. საწყისი და გაგრძელებების შედეგად მიღებული ბმულობის ფორმულებისათვის მოქცეთ შემდეგნაირად: საწყისი ფორმულა გავამრავლოთ $e^{2\pi i\sigma}$ რიცხვზე, შედეგად მიიღება შემდეგი ტოლობები

$$e^{2\pi i\sigma}F_0 = e^{2\pi i\sigma}a_1F_1 + e^{2\pi i\sigma}b_1G_1 = e^{2\pi i\sigma}a_\infty F_\infty + e^{2\pi i\sigma}b_\infty G_\infty, \qquad (4.2.5.)$$

$$e^{2\pi i\sigma}G_0 = e^{2\pi i\sigma}c_1F_1 + e^{2\pi i\sigma}d_1G_1 = e^{2\pi i\sigma}c_\infty F_\infty + e^{2\pi i\sigma}d_\infty G_\infty, \qquad (4.2.6.)$$

მას გამოვაკლოთ მიღებული ფორმულები გამრავლებული $e^{-2\pi i\sigma}$ რიცხვზე

$$e^{-2\pi i\sigma}a_1F_1 + b_1e^{-2\pi i\sigma}e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}G_1 = a_\infty e^{-2\pi i\sigma}e^{-2\pi i\alpha}F_\infty + b_\infty e^{-2\pi i\sigma}e^{-2\pi i\beta}G_\infty, \qquad (4.2.7.)$$

$$a_1e^{-2\pi i\sigma}F_1 + b_1e^{-2\pi i\sigma}e^{2\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}G_1 = e^{-2\pi i\sigma}e^{2\pi i\gamma}\left(a_\infty e^{-2\pi i\alpha}F_\infty + b_\infty e^{-2\pi i\beta}G_\infty\right) \qquad (4.2.8.)$$

და გავითვალისწინოთ რომ:

$$e^{\pi i\sigma} - e^{-\pi i\sigma}e^{2\pi i\tau} = 2i\sin\big((\sigma-\tau)\pi\big)e^{2\pi i\tau} \qquad (4.2.9.)$$

შედეგად მიიღება ტოლობები:

$$a_1\sin(\sigma\pi)F_1 + b_1\sin\Big(\big(\sigma-(\gamma-\alpha-\beta)\big)\pi\Big)e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}G_1 =$$

$$= a_\infty\sin\big((\sigma+\alpha)\pi\big)e^{-\pi i\alpha}F_\infty + b_\infty\sin\big((\sigma+\beta)\pi\big)e^{-\pi i\beta}G_\infty \qquad (4.2.10.)$$

და

$$c_1\sin(\sigma\pi)F_1 + d_1\sin\Big(\big(\sigma-(\gamma-\alpha-\beta)\big)\pi\Big)e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}G_1 =$$

$$= c_\infty\sin\big((\sigma+\alpha-\gamma)\pi\big)e^{-\pi i(\alpha-\gamma)}F_\infty + d_\infty\sin\big((\sigma+\beta-\gamma)\pi\big)e^{-\pi i(\beta-\gamma)}G_\infty. \qquad (4.2.11.)$$

თუ ჩვენ ტოლობებში ჯერ σ-ს ადგილას ჩავსვამთ გამოსახულებას $\sigma = \gamma-\alpha-\beta$, მიიღება ტოლობები:

$$a_1\sin\big((\gamma-\alpha-\beta)\pi\big)F_1 = a_\infty\sin\big((\gamma-\beta)\pi\big)e^{-\pi i\alpha}F_\infty + b_\infty\sin\big((\gamma-\alpha)\pi\big)e^{-\pi i\beta}G_\infty \qquad (4.2.12.)$$

და

$$c_1\sin\big((\gamma-\alpha-\beta)\pi\big)F_1 = c_\infty\sin(-\beta\pi)e^{-\pi i(\alpha-\gamma)}F_\infty + d_\infty\sin(-\alpha\pi)e^{-\pi i(\beta-\gamma)}G_\infty, \qquad (4.2.13.)$$

ხოლო $\sigma = 0$-ის შემთხვევაში კი მიიღება ტოლობები:

$$-b_1\sin\big((\gamma-\alpha-\beta)\pi\big)e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}G_1 = a_\infty\sin(\alpha\pi)e^{-\pi i\alpha}F_\infty + b_\infty\sin(\beta\pi)e^{-\pi i\beta}G_\infty \qquad (4.2.14.)$$

და

$$-d_1\sin\big((\gamma-\alpha-\beta)\pi\big)e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}G_1 =$$

$$= c_\infty\sin\big((\alpha-\gamma)\pi\big)e^{-\pi i(\alpha-\gamma)}F_\infty + d_\infty\sin\big((\beta-\gamma)\pi\big)e^{-\pi i(\beta-\gamma)}G_\infty. \qquad (4.2.15.)$$

ჯერ-ჯერობით დავუშვათ, რომ a_1, b_1, c_1, d_1, a_∞, b_∞, c_∞, d_∞ ზმულობის კოეფიციენტები არ არიან ნულები. ზემოთ მიღებული ტოლობების გათვალისწინებით მიიღება შემდეგი ტოლობები:

$$\frac{a_1}{c_1}=\frac{a_\infty}{c_\infty}\frac{\sin\big((\gamma-\beta)\pi\big)e^{-\pi i\alpha}}{\sin(-\beta\pi)e^{-\pi i(\alpha-\gamma)}}=\frac{b_\infty}{d_\infty}\frac{\sin\big((\gamma-\alpha)\pi\big)e^{-\pi i\beta}}{\sin(-\alpha\pi)e^{-\pi i(\beta-\gamma)}} \tag{4.2.16.}$$

და

$$\frac{b_1}{d_1}=\frac{a_\infty}{c_\infty}\frac{\sin(\alpha\pi)e^{-\pi i\alpha}}{\sin\big((\alpha-\gamma)\pi\big)e^{-\pi i(\alpha-\gamma)}}=\frac{b_\infty}{d_\infty}\frac{\sin(\beta\pi)e^{-\pi i\beta}}{\sin\big((\beta-\gamma)\pi\big)e^{-\pi i(\beta-\gamma)}}. \tag{4.2.17.}$$

თუ გავითვალისწინებთ, რომ F_0, G_0, F_1, G_1, F_∞, G_∞ განსაზღვრულები არიან განუსაზღვრელი მუდმივი მამრავლებით (3 განტოლებაა და 8 უცნობი), მაშინ ეს შესაძლებლობას მოგვცემს, რომ მაგალითად a_1, b_1, c_1, d_1 და ერთ-ერთი a_∞, b_∞, c_∞, d_∞-კოეფიციენტებიდან ნებისმიერად ავიღოთ. მრავალი სხვადასხვა შესაძლებლობიდან რიმანმა ისე შეარჩია კოეფიციენტები, რომ საბოლოოდ მიიღო ასეთი მატრიცები:

$$P_1=\frac{1}{\sin\big((\gamma-\alpha-\beta)\pi\big)}\begin{pmatrix}\sin\big((\gamma-\alpha)\pi\big)e^{-\pi i\gamma} & \sin(\beta\pi)\\ \sin(\alpha\pi)e^{-\pi i(\alpha+\beta)} & \sin\big((\gamma-\beta)\pi\big)e^{\pi i(\gamma-\alpha-\beta)}\end{pmatrix} \tag{4.2.18.}$$

და

$$P_\infty=\frac{1}{\sin\big((\beta-\alpha)\pi\big)}\begin{pmatrix}\sin\big((\gamma-\alpha)\pi\big) & \sin\big((\beta-\gamma)\pi\big)\\ -\sin(\alpha\pi) & \sin(\beta\pi)\end{pmatrix}. \tag{4.2.19.}$$

შედეგი 4.2.1.: ჰიპერგეომეტრიული განტოლების მონოდრომიის ჯგუფი წარმოქმნილია M_0, $P_1^{-1}M_1P_1$ და $P_\infty^{-1}M_\infty P_\infty$, სადაც P_1 და P_∞ ზემოთ მოყვანილი მატრიცებია.

დამტკიცება: ეს შედეგი გამომდინარეობს თეორმა 4.1.1.-სგან.

ახლა განვიხილოთ შემთხვევა, როდესაც ბმულობის კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც ნულის ტოლია, რომელიც დაგვანახებს ბმულობის კოეფიციენტების გადაუგვარებლობის მოთხოვნის მნიშვნელობას. თუ $a_1, b_1, c_1, d_1, a_\infty, b_\infty, c_\infty, d_\infty$ კოეფიციენტებიდან ერთი მაინც იქნება ნულის ტოლი ეს ნიშნავს, რომ $\mathbb{B}_0$-სა და $\mathbb{B}_0$-ს ან $\mathbb{B}_\infty$-ს აქვთ ერთიდაიგივე ტიპის ელემენტი, რომლებიც ერთმანეთისაგან შესაძლოა განსხვავდებოდნენ მუდმივი მამრავლით. ასეთი ფუნქცია არის ერთდროულად როგორც λ_0, ისე λ_1 ან λ_∞ წირების გასწვრივ გაგრძელებების შედეგად წარმოქმნილი მონოდრომიის მატრიცის საკუთრივი ვექტორი და ამის გამო, მონოდრომიის ყველა სხვა მატრიცის საკუთრივი ვექტორიც. ერთი მხრივ მონოდრომიის წარმოდგენისათვის $\pi_1(\mathbb{CP}^1 \setminus \{0,\ 1,\ \infty\}) \to GL(\mathbb{F}(\Omega))$ ეს ნიშნავს, რომ არსებობს არატრივიალური ქვესივრცე ე. ი. არც $\{0\}$ და არც $\mathbb{F}(\Omega)$ (აქ საკუთრივი ვექტორებისაგან წარმოქმნილი წრფივი სივრცე), რომელიც სტაბილურია მონოდრომიის ჯგუფის წრფივი მოქმედების მიმართ, სადაც $\mathbb{F}(\Omega)$ აღნიშნავს დიფერენციალურ განტოლებათა სივრცის ამონახსნა სივრცეს, რომელიც მოცემულია Ω ღია სიმრავლეზე $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$-ში. ასეთ წარმოდგენებს დაყვანადი წარმოდგენები ეწოდებათ. მეორე მხრივ ჰიპერგეომეტრიული განტოლებისათვის ჩვენ გვაქვს ისეთი f ამონახსნი, რომ მისი λ_0 და λ_1 წირების გასწვრივ გაგრძელებების შედეგად მიიღება შემდეგი ამონახსნები - $f^{\lambda_0} = e^{2\pi i \mu_0} f$, სადაც $\mu_0 \in \{0,\ 1-\gamma\}$ და $f^{\lambda_1} = e^{2\pi i \mu_1} f$, სადაც $\mu_1 \in \{0,\ \gamma-\alpha-\beta\}$. ამის გამო $f = z^{\mu_0}(1-z)^{\mu_1} g$, სადაც g არის ერთობლივად სასრული ზრდის მქონე ყოველ განსაკუთრებულ წერტილში, საიდანაც გამოდის, რომ მერომორფულია $\mathbb{CP}^1$-ზე, საიდანაც გამოდის, რომ რაციონალურია. მაშინ ოპერატორი

$$\frac{Df}{f} = \frac{Dg}{g} + \frac{\mu_0}{z} + \frac{\mu_1}{1-z} \tag{4.2.20.}$$

თავისთავად გამოდის რაციონალური. ამის გამო ჰიპერგეომეტრიული განტოლება შეიძლება ჩაიწეროს შემდეგი ფორმით:

$$D^2 + \frac{\gamma-(\alpha+\beta+1)z}{z(1-z)} D - \frac{\alpha\beta}{z(1-z)} = (D-u)(D-v), \tag{4.2.21.}$$

სადაც u და $u \in \mathbb{C}(z)$ - $\mathbb{CP}^1$-ზე მოცემული მერომორფული ფუნქციების ოჯახის ქვესივრცის ელემენტებია. ეს ნიშნავს, რომ (4.2.21.) ჰიპერგეომეტრიული დიფერენციალური ოპერატორი დაყვანადია $C(z)$-ზე.

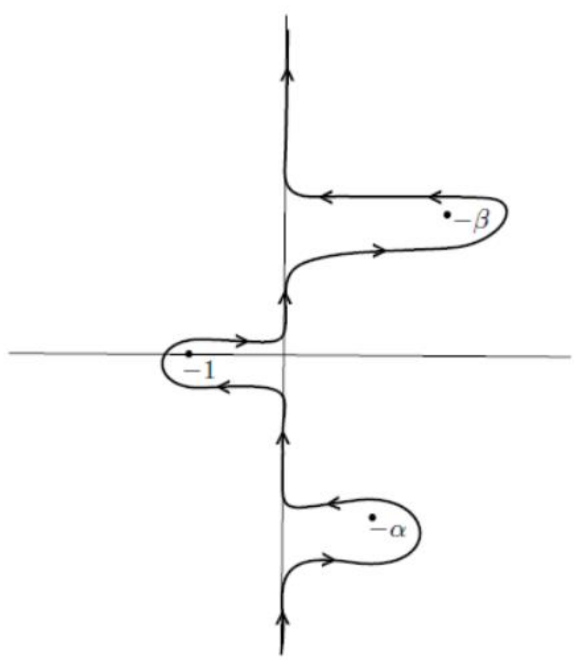
4. 3. გლობალური მონოდრომიის გამოთვლა ბარნის ბმულობის ფორმულის გამოყენებით

ამ თავში ჩვენ მოვიყნავთ ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის წარმოდგენის ფორმულას, რომელსაც ჰიპერგეომეტრიული მწკრივის ბარნის ინტეგრალური წარმოდგენა ეწოდება ინგლისელი მათემატიკოსის Ernest William Barnes (1874-1953) გამო და მოიცემა შემდეგი სახით:

$$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_C \frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(-s)}{\Gamma(\gamma+s)}(-z)^s ds \qquad (4.3.1.)$$

ინტეგრება ხდება C ვერტიკალურ წარმოსახვით წირზე $-i\infty$ და $+i\infty$ უსასრულო ბოლოების ჩათვლით, რომელიც აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:

- მარცხნიდან შემოუვლის -1 წერტილს;
- მარჯვნიდან შემოუვლის $-\alpha$ წერტილს;
- მარჯვნიდან შემოუვლის $-\beta$ წერტილს.



ნახაზი 4.3.1.

ჰიპერგეომეტრიული ფუნქციის ინტეგრალური სახით წარმოდგენის გამოყენებით ბარნსმა დაამტკიცა ბმულობის შემდეგი ფორმულა, რომლისგანაც უშუალოდ გამომდინარეობს ლოკალური მონოდრომიის გამოსათვლელი ფორმულა

$$\mathrm{F}(\alpha,\ \beta,\ \gamma;\ z)=\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-z)^{-\alpha}\mathrm{F}\left(\alpha,\ \alpha-\gamma+1,\ \alpha-\beta+1;\frac{1}{z}\right)+$$
$$+\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)}(-z)^{-\beta}\mathrm{F}\left(\beta,\ \beta-\gamma+1,\ \beta-\alpha+1;\frac{1}{z}\right). \qquad (4.3.2.)$$

წინადადება 4.3.1.: ბაზისის ვექტორ-ფუნქციებისათვის სრულდება ტოლობა $\mathbb{B}_0=\mathbb{B}_\infty \mathrm{P}$, სადაც

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix} e^{-\pi i\alpha}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)} & e^{-\pi i\alpha'}\dfrac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\beta'-\alpha')}{\Gamma(\beta')\Gamma(\gamma'-\alpha')} \\ e^{-\pi i\beta}\dfrac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\beta)} & e^{-\pi i\beta'}\dfrac{\Gamma(\gamma')\Gamma(\alpha'-\beta')}{\Gamma(\alpha')\Gamma(\gamma'-\beta')} \end{pmatrix}, \qquad (4.3.3.)$$

სადაც $\alpha'=\alpha-\gamma+1$, $\beta'=\beta-\gamma+1$ და $\gamma'=2-\gamma$.

წინადადება 4.3.2.: $\mathbb{B}_0$ ბაზისის შესაბამისი მონოდრომიის ჯგუფი წარმოქმნილია M_0 და $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}_\infty\mathrm{P}$ მატრიცების საშუალებით.

დასკვნა

ნაშრომში შესწავლილია რეგულარული განსაკუთრებული წერტილების მქონე დიფერენციალური განტოლების გლობალური ამონახსნის არსებობის პრობლემა ჰიპერგეომეტრიული განტოლების მაგალითზე. ამ შემთხვევაში, როგორც ცნობილია ლოკალური ამონახსნები და აქედან გამომდინარე, ლოკალური მონოდრომიის ჯგუფი გამოთვლადია კვადრატურებში.

ჰიპერგეომეტრიული განტოლება თავისუფალია აქსესორული პარამეტრებისგან, რის გამოც მისი გლობალური მონოდრმია, ისევე როგორც ლოკალური, გამოთვლადია კვადრატურებში.

ნაშრომში გამოთვლილია გლობალური მონოდრმიის ჯგუფი, რისთვისაც გამოყენებულია არაკომპაქტური რიმანის ზედაპირის ფუნდამენტური ჯგუფის წარმოდგენის თვისებები და ამით გადაჭრილი ე. წ. ბმის მატრიცის პრობლემა ჰიპერგეომეტრიული განტოლებისათვის.

აღნიშნული საკითხი, ამოცანის სახით მოყვანილია [3] მონოგრაფიაში.

გამოყენებული ლიტერატურა

1. Jacques Sauloy, Differential Galois Theory through Riemann-Hilbert Correspondence: An Elementary Introduction, Institut de Mathématiques de Toulouse, Toulouse, France.
2. Kazuhiko Aomoto, Michitake Kita, Theory of Hypergeometric Functions.
3. Y. Sibuya. Linear Differential Equations in the Complex Domain: Problems of Analytic Continuation. 1990, AMS.