უნიფიკაციის პრობლემა 4-ნიშნა განზოგადოებულ პოსტის ალგებრათა მრავალსახეობაში

თათია დუნდუა

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის
თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი
ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი
მათემატიკის დეპარტამენტი
ხელმძღვანელი: რევაზ გრიგოლია,ასოც. პროფესორი,
ფიზ.-მათ. მეცნიერებათა დოქტორი

თბილისი 2024

სარჩევი

ანოტაცია

აქსიომატიკურად შემოღებულია 4-ნიშნა განზოგადოებული პოსტის ალგებრა, რომელიც მიღებულია ორი კონსტანტით გამდიდრებული სრულყოფილი MV-ალგებრებიდან. შესწავლილია უნიფიკაციის პრობლემა 4-ნიშნა განზოგადოებულ პოსტის ალგებრებით წარმოქმნილ მრავალსახეობაში.

Annotation

A 4-valued generalized Post algebra, derived from perfect MV-algebras enriched with two constants, is axiomatically introduced. The problem of unification in variety generated by 4-valued generalized Post algebras is studied.

1 შესავალი

უნიფიკაცია გამოყვანის ფორმალიზმებში არის ფუნდამენტური პროცესი[4, 6]. მათემატიკურად უნიფიკაცია ნიშნავს გამოსახულებებს შორის განტოლებების ამოხსნას. მაგალითად, თუ გვაქვს ორი გამოსახულება $f(a,x)$ და $f(y,b)$, ამ გამოსახულებებს შორის ტოლობას ჩავწერთ $f(a,x) \doteq^? f(y,b)$, სადაც x,y ცვლადებია, ხოლო f,a,b ფუნქციონალური სიმბოლოები. ტოლობის ამოხსნა ნიშნავს ცვლადების ისეთი მნიშვნელობების პოვნას, რომელიც ტოლობის ორივე მხარეს იდენტურს გახდის. ზემოთაღნიშნულ მაგალითში, თუ x-ს ჩავანაცვლებთ b-ით და y-ს a-ით, მივიღებთ სინტაქსურად ტოლ გამოსახულებებს.

საბაკალავრო ნაშრომში განხილულია უნიფიკაცია ოთხნიშნა განზოგადოებულ პოსტის ალგებრებში.

თეზისი სტრუქტურირებულია შემდეგნაირად: მეორე თავში მიმოხილულია უნიფიკაციის თეორიის ძირითადი ცნებები, როგორიცაა ჩასმა, ჩასმების კომპოზიცია, უნიფიკატორის და უზოგადესი უნიფიკატორის ცნებები და ა.შ. მესამე თავში მოცემულია სინტაქსური უნიფიკაციის ალგორითმი. მეოთხე თავში განხილულია ეკვაციური უნიფიკაცია, რაც ნიშნავს უნიფიკაციის პრობლემას სხვადასხვა თეორიების მიმართ. კერძოდ, თუ თეორია არის ცარიელი, მაშინ გვექნება სინტაქსური უნიფიკაციის პრობლემა, რომლის ამოხსნის ალგორითმი მოცემულია მესამე თავში. როცა (E) არაცარიელია, მაშინ ყოველი (E) თეორიისთვის, საჭიროა ახალი უნიფიკაციის ალგორითმის აგება. (E) თეორია შეიძლება მოცემული იყოს სხვადასხვა აქსიომებით. მაგალითად, კომუტაციურობის აქსიომით, ასოციაციურობის აქსიომით, ერთეულოვანი ელემენტის აქსიომით, ან მათი კომბინაციებით და ა.შ. ბოლო თავში, განხილული გვაქვს ეკვაციური თეორიის შემთხვევა, როცა თეორია იძლევა უნიფიკაციას განზოგადოებულ ოთხნიშნა პოსტის ალგებრებში.

2 სინტაქსური უნიფიკაცია

ამ თავში მიმოხილული იქნება სინტაქსური უნიფიკაცია, რომელიც შესწავლილია [1, 7]. კერძოდ, განვსაზღვრავთ უნიფიკაციის პრობლემას, ვისაუბრებთ ყველაზე ზოგად ამონახსნზე და ავაგებთ სინტაქსური უნიფიკაციის ამოხსნის ალგორითმს, რომელიც იღებს სინტაქსური უნიფიკაციის პრობლემას და აბრუნებს ყველაზე ზოგად ამონახსნს.

ფუნქციონალური სიმბოლოების სასრული ან უსასრული სიმრავლის სახით მოცემული გვაქვს სიგნატურა $\mathcal{F}$, სადაც ყოველი ფუნქციონალური სიმბოლოსთვის განსაზღვრულია მისი ადგილიანობა. დავუშვათ, $\mathcal{V}$ არის ცვლადების სიმრავლე. მოცემული სიგნატურისთვის და ცვლადების სიმრავლისთვის ტერმი t განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$t ::= x \mid f(t_1, \ldots, t_n)$$

სადაც, f არის n ადგილიანი ფუნქციონალური სიმბოლო $\mathcal{F}$-დან და x ცვლადია $\mathcal{V}$-დან. ჩვენ გამოვიყენებთ t, r, s ასოებს ტერმების აღსანიშნად.

ჩასმა, არის ასახვა ცვლადებიდან ტერმებში,სადაც თითქმის ყველა ცვლადი ასახულია თავის თავში. ჩასმებს აღვნიშნავთ ბერძნული პატარა ასოებით $\sigma, \theta, \tau, \rho$. ცარიელ ჩასმას აღვნიშნავთ ϵ სიმბოლოთი. σ ჩასმის აპლიკაცია t ტერმზე, აღინიშება $t\sigma$ და განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$t\sigma| = \begin{cases} x\sigma & \text{თუ } t = x \\ f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma) & \text{თუ } t = f(t_1, \ldots, t_n) \end{cases}$$

ახლა ჩვენ განვსაზღვრავთ, ჩასმის განსაზღვრის და მნიშვნელობათა არეებს. σ ჩასმის, *განსაზღვრის არე* აღინიშნება $\mathit{dom}(\sigma)$ და არის შემდეგი ცვლადების სიმრავლე:

$$\mathit{dom}(\sigma) = \{x \mid x\sigma \neq x\},$$

ხოლო, σ ჩასმის *მნიშვნელობათა არე* აღნიშნება $\mathit{ran}(\sigma)$ და წარმოადგენს შემდეგი ტერმების სიმრავლეს:

$$\mathit{ran}(\sigma) = \bigcup_{x \in \mathit{dom}(\sigma)} \{x\sigma\}.$$

ამასთან, σ ჩასმის მნიშვნელობათა არეში შემავალი ცვლადების სიმრავლე აღინიშნება $\mathit{vran}(\sigma)$ და განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$\mathit{vran}(\sigma) = \mathit{vars}(\mathit{ran}(\sigma)).$$

სადაც *vars* აღნიშნავს ცვლადების სიმრავლეს, რომლებიც შედის მის არგუმენტში, ანუ *ran*(σ) ტერმში შემავალი ცვლადების სიმრავლეს.

მაგალითად, დავუშათ $\sigma_1 = \{x \mapsto f(a, y), y \mapsto g(z)\}$ და $\sigma_2 = \{x \mapsto f(a, b), y \mapsto g(c)\}$.

$$
\begin{aligned}
\mathit{dom}(\sigma_1) &= \{x, y\} \\
\mathit{dom}(\sigma_2) &= \{x, y\} \\
\mathit{ran}(\sigma_1) &= \{f(a, y), g(z)\} \\
\mathit{ran}(\sigma_2) &= \{f(a, b), g(c)\} \\
\mathit{vran}(\sigma_1) &= \{y, z\} \\
\mathit{vran}(\sigma_2) &= \emptyset
\end{aligned}
$$

σ ჩასმის შეზღუდვა $\mathcal{X}$ ცვლადების სიმრავლეზე, აღნიშნება $\sigma|_\mathcal{X}$ და არის ჩასმა, რომელიც ყოველი x-თვის აკმაყოფილებს შემდეგ თვისებას:

$$x\sigma|_\mathcal{X} = \begin{cases} x\sigma & \text{თუ } x \in \mathcal{X} \\ x & \text{სხვა შემთხვევაში} \end{cases}$$

მაგალითად:

- $\{x \mapsto f(a), y \mapsto x, z \mapsto b\}|_{\{x,y\}} = \{x \mapsto f(a), y \mapsto x\}$.
- $\{x \mapsto f(a), z \mapsto b\}|_{\{x,y\}} = \{x \mapsto f(a)\}$.
- $\{z \mapsto b\}|_{\{x,y\}} = \varepsilon$.

σ და ϑ ჩასმების კომპოზიცია, აღნიშნება $\sigma\vartheta$ და განსაზღვრულია, როგორც

$$t(\sigma\vartheta) = (t\sigma)\vartheta$$

σ და ϑ ჩასმების კომპოზიცია $\sigma\vartheta$, გამოითვლება შემდეგი ალგორითმით:

1. ვამუშაოთ ϑ ჩასმა *ran*(σ)-ში შემავალ ყოველ ტერმზე, რომ მივიღოთ σ_1.
2. ϑ-დან წავშალოთ ყველა ისეთი $x \mapsto t$ სახის ასახვა, სადაც $x \in$ *dom*(σ) რომ მივიღოღ ϑ_1.
3. σ_1-დან წავშალოთ ყველა ტრივიალური $x \mapsto x$ სახის ასახვა, რომ მივიღოთ σ_2.

4. ავიღოთ, σ_2-ის და ϑ_1-ს გაერთიანება.

მაგალითად, დავუშვათ $\sigma = \{x \mapsto f(y), y \mapsto z\}$ და $\vartheta = \{x \mapsto a, y \mapsto b, z \mapsto y\}$. ზემოთმოყვანილი ალგორითმის გამოყენებით, ნაბიჯ-ნაბიჯ გამოვთვლით σ და ϑ ჩასმების კომპოზიციას $\sigma\vartheta$:

1. $\sigma_1 = \{x \mapsto f(y)\vartheta, y \mapsto z\vartheta\} = \{x \mapsto f(b), y \mapsto y\}$
2. $\vartheta_1 = \{z \mapsto y\}$
3. $\sigma_2 = \{x \mapsto f(b)\}$
4. $\sigma\vartheta = \{x \mapsto f(b), z \mapsto y\}$

კომპოზიცია, ზოგადად არ არის კომუტაციური. მაგალითად,

$$\vartheta\sigma = \{x \mapsto a, y \mapsto b\} \neq \sigma\vartheta.$$

ჩასმის ელემენტალური თვისებები:

თეორემა 1 • *ჩასმების კომპოზიცია ასოციაციურია.*

- *ყოველი $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{V}$, t და σ, თუ* vars$(t) \subseteq \mathcal{X}$ *მაშინ* $t\sigma = t\sigma|_{\mathcal{X}}$.
- *ყოველი σ, ϑ, და t, თუ $t\sigma = t\vartheta$ მაშინ* $t\sigma|_{vars(t)} = t\vartheta|_{vars(t)}$

ჩასმას, $\sigma = \{x_1 \mapsto y_1, x_2 \mapsto y_2, \ldots, x_n \mapsto y_n\}$ ვუწოდოთ *ცვლადების ჩანაცვლება* მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა y ცვლადები განსხვავებულია და $\{x_1, \ldots, x_n\} = \{y_1, \ldots, y_n\}$.

σ-ს *შებრუნებული*, აღინიშნება σ^{-1} და არის ჩასმა, რომელიც განსაზღვრული შემდეგნაირად:

$$\sigma^{-1} = \{y_1 \mapsto x_1, y_2 \mapsto x_2, \ldots, y_n \mapsto x_n\}$$

მაგალითად, $\{x \mapsto y, y \mapsto z, z \mapsto x\}$ ცვლადების გადასახელებაა. მაშინ, როცა $\{x \mapsto a\}$, $\{x \mapsto y\}$, და $\{x \mapsto z, y \mapsto z\}$ არ არიან ცვლადების გადასახელება.

ვიტყვით, რომ ჩასმა σ არის *იდემპოტენტური*, თუ $\sigma\sigma = \sigma$. მაგალითად, $\sigma = \{x \mapsto f(z), y \mapsto z\}$ იდემპოტენდური ჩასმაა, მაშინ როცა $\vartheta = \{x \mapsto f(y), y \mapsto z\}$ არ არის იდემპოტენტური.

თეორემა 2 *σ იდემპოტენტურია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა* dom$(\sigma) \cap$ vran$(\sigma) = \emptyset$.

ვიტყვით, რომ ჩასმა σ *უფრო ზოგადია* ვიდრე ϑ, იწერება $\sigma \preceq \vartheta$, თუ არსებობს ჩასმა η ისეთი, რომ $\sigma\eta = \vartheta$. მიმართება $\preceq$ კვაზი-დალაგებაა (რეფლექსური და ტრანზიტული ბინარული მიმართება). $\simeq$-ით აღვნიშნავთ $\preceq$ მიმართების შესაბამის ექვივალენტურ მიმართებას. დავუშვათ, $\sigma = \{x \mapsto y\}$, $\rho = \{x \mapsto a, y \mapsto a\}$, და $\vartheta = \{y \mapsto x\}$. მაშინ,

- $\sigma \preceq \rho$, იმიტომ, რომ $\sigma\{y \mapsto a\} = \rho$.
- $\sigma \preceq \vartheta$, იმიტომ, რომ $\sigma\{y \mapsto x\} = \vartheta$.
- $\vartheta \preceq \sigma$, იმიტომ, რომ $\vartheta\{x \mapsto y\} = \sigma$.
- $\sigma \simeq \vartheta$.

თეორემა 3 *ყოველი σ და ϑ, $\sigma \simeq \vartheta$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, თუ არსებობს ცვლადების ჩასმა η ისეთი, რომ $\sigma\eta = \vartheta$.*

მაგალითად, თუ $\sigma = \{x \mapsto y\}$ და $\vartheta = \{y \mapsto x\}$, მაშინ $\sigma \simeq \vartheta$, იმიტომ რომ $\sigma\{x \mapsto y, y \mapsto x\} = \vartheta$.

ვიტყვით, რომ ჩასმა σ არის s და t ტერმების *უნიფიკატორი*, თუ $s\sigma = t\sigma$. ამასთან, უნიფიკატორი σ, არის s და t-ს *უზოგადესი უნიფიკატორი (mgu)*, თუ s და t-ს ყოველი სხვა უნიფიკატორი ϑ-თვის $\sigma \preceq \vartheta$ სრულდება. s და t ტერმებს შორის უნიფიკაციის პრობლემას აღვნიშნავთ $s \doteq^? t$.

განვიხილოთ უნიფიკაციის პრობლემა $f(x, z) \doteq^? f(y, g(a))$, რომლის ზოგიერთი უნიფიკატორია:

$$
\begin{aligned}
&\{x \mapsto y, z \mapsto g(a)\}\\
&\{y \mapsto x, z \mapsto g(a)\}\\
&\{x \mapsto a, y \mapsto a, z \mapsto g(a)\}\\
&\{x \mapsto f(x, y), y \mapsto f(x, y), z \mapsto g(a)\}\\
&\dots
\end{aligned}
$$

ხოლო, მოცემული უნიფიკაციის პრობლემის უზოგადესი უნიფიკატორია $\{x \mapsto y, z \mapsto g(a)\}$, $\{y \mapsto x, z \mapsto g(a)\}$. აღსანიშნავია, რომ ჩვენს მიერ განსაზღვრული ტერმებისთვის, ყველაზე ზოგადი უნიფიკატორი ზოგადად ერთადერთია.

ჩვენი მიზანია, ავაგოთ უნიფიკაციის ალგორითმი, რომელიც იღებს უნიფიკაციის პრობლემას $s \doteq^? t$ და აბრუნებს s და t ტერმების ყველაზე ზოგად უნიფიკატორს, თუ s და t უნიფიცირებადია, ხოლო წარუმატებლობას სხვა შემთხვევაში.

ალგორითმი: დაწერეთ ორი ტერმი და დააყენეთ მარკერი სადაც ეს ტერმები იწყებიან. შემდეგ:

1. გადავაადგილოთ ორივე მარკერი პარალელურად, თითო სიმბოლოთი ერთდროულად, მანამ, სანამ ორივე მარკერი გავა ტერმის ბოლოში (**წარმატება**), ან ორივე მიმართულია განსხვავებული სიმბოლოსკენ;

2. თუ ორივე სიმბოლო არაცვლადია, მაშინ გამოიტანე **წარუმატებლობა**; სხვა შემთხვევაში, თუ ერთი სიმბოლო ცვლადია (ვთქვათ, x), ხოლო მეორე სიმბოლო, კი რაღაც t ქვეტერმის პირველი სიმბოლოა:

   - თუ x შედის t-ში, მაშინ **წარუმატებლობა**;
   - სხვა შემთხვევაში, დავწეროთ "$x \mapsto t$", როგორც ამონახსნის ნაწილი და

     შევცვალოთ x ყველგან t-ით (ამონახსენშიც), და დაბრუნდით 1-ში.

ეს მარტივი ალგორითმი მეთოდურად აღმოაჩენს ორ ტერმს შორის შეუსაბამობას და ცდილობს მის გასწორებას ცვლადების ადგილას ტერმების ჩანაცვლებით: ეს გასწორება ვერ ხერხდება, როდესაც გვაქვს განსხვავებული ფუნქციონალური სიმბოლოები ან თუ ვცდილობთ ცვლადის უნიფიცირებას ტერმთან, რომელიც შეიცავს ამ ცვლადს.

Input: s და t ტერმები
Output: s და t-ს ყველაზე ზოგადი უნიფიკატორი
Global: ჩასმა σ. თავდაპირველად ცარიელი ჩასმა

```
Unify (s,t)
begin
    if s ცვლადია then s := sσ; t := tσ
    Print(s, ' ≐? ', t, 'σ = ', σ)
    if s ცვლადია და s = t then Do nothing
    else if s = f(s1, ..., sn) and t = g(t1, ..., tm), n, m ≥ 0 then
        if f = g then for i := 1 to n do Unify(si, ti)
        else გამოდი წარუმატებლად
    else if s არაა ცვლადი then Unify (t, s)
    else if s შემოდის t-ში then გამოდი წარუმატებლად
    else σ := σ{s ↦ t}
end
```

Algorithm 1: უნიფიკაციის ალგორითმი

3 უნიფიკაციის ალგორითმი

ჩვენ, ახლა განვიხილავთ წესებზე დაფუძნებულ უნიფიკაციის ალგორითმს. ვიტყვით, რომ ტოლობების სიმრავლე არის *ამოხსნად ფორმაში*, თუ მას აქვს

$$\{x_1 \doteq t_1, \ldots, x_n \doteq t_n\}$$

სახე, სადაც ყოველი x_i გვხვდება ზუსტად ერთხელ. ყოველი იდემპოტენტური ჩასმისთვის არსებობს მხოლოდ ერთი ტოლობათა სიმრავლე ამოხსნად ფორმაში. ყოველი იდეპოტენტური σ ჩასმისთვის, შესაბამისი ამოხსნილი ფორმა აღინიშნება $[\sigma]$, და ყოველი განტოლებათა ამოხსნად ფორმაში მყოფი S სიმრავლისთვის შესაბამისი იდემპოტენტური ჩასმა აღინიშნება σ_S.

სისტემა არის $\perp$ (წარუმატებლობა) ან $P; S$, სადაც P უნიფიკაციის პრობლემების მულტისიმრავლეა, ხოლო S განტოლებათა სიმრავლე ამოხსნად ფორმაში. ვიტყვით, რომ ჩასმა არის $P; S$-ის უნიფიკატორი (ამონახსნი), თუ ის უნიფიკაციას უკეთებს P-ს და S-ის ყოველ ტოლობას. $\perp$ არ აქვს უნიფიკატორი. მაგალითად, მოცემულია სისტემა $\{g(a) \doteq^? g(y), g(z) \doteq^? g(g(x))\}; \{x \doteq g(y)\}$, რომლის უნიფიკატორია $\{x \mapsto g(a), y \mapsto a, z \mapsto g(g(a))\}$.

უნიფიკაციის გამოყვანის ალგორითმი შეიცავს შემდეგ წესებს:

Trivial:

$\{s \doteq^? s\} \uplus P'; S \Longrightarrow P'; S.$

Decomposition:

$\{f(s_1, \ldots, s_n) \doteq^? f(t_1, \ldots, t_n)\} \uplus P'; S \Longrightarrow$
$\{s_1 \doteq^? t_1, \ldots, s_n \doteq^? t_n\} \cup P'; S,$ where $n \geq 0.$

Symbol Clash:

$\{f(s_1, \ldots, s_n) \doteq^? g(t_1, \ldots, t_m)\} \uplus P'; S \Longrightarrow \bot$ if $f \neq g.$

Orient:

$\{t \doteq^? x\} \uplus P'; S \Longrightarrow \{x \doteq^? t\} \cup P'; S,$
if t is not a variable.

Occurs Check:

$\{x \doteq^? t\} \uplus P'; S \Longrightarrow \bot,$ if $x \in$ *vars*(t) but $x \neq t.$

Variable Elimination:

$\{x \doteq^? t\} \uplus P'; S \Longrightarrow P'\{x \mapsto t\}; S\{x \mapsto t\} \cup \{x \doteq t\},$
if $x \notin$ *vars*$(t).$

იმისათვის, რომ მოვახდინოთ s და t ტერმების უნიფიკაცია, უნდა შევქმნათ საწყისი სისტემა $\{s \doteq^? t\}; \emptyset$ და გადავწეროთ ზემოთ მოყვანილი წესებით. ყოველი განტოლებათა სასრული მულტიმისმრავლისთვის, სისტემის გადაწერა

$$P; \emptyset \Longrightarrow P_1; \sigma_1 \Longrightarrow P_2; \sigma_2 \Longrightarrow \cdots$$

ზემოთმოყვანილი წესებით სრულდება სასრულ ნაბიჯზე $\bot$ სიმბოლოთი ან $\emptyset; S$ სისტემით, სადაც S ამოხსნილ ფორმაშია. ასევე, [1]-ში დამტკიცებულია მოცემული ალგორითმის სისწორე და სისრულე. რაც ნიშნავს, რომ მოცემული ალგორითმი ითვლის უზოგადეს ამონახს, თუ განტოლებათა სისტემას ასეთი ამონახსენი გააჩნია.

4 ეკვაციური უნიფიკაცია

სინტაქსური უნიფიკაციის მსგავსად, ეკვაციური ეხება ტერმების შეთანადებას შესაბამისი ჩასმების გამოყენებით. ერთადერთი განსხვავება ის არის, რომ სინტაქსური უნიფიკაციის დროს ვეძებთ ისეთ ჩასმებს, რომლებიც აქცევს ტერმებს სინტაქსურად ტოლს. ხოლო, ეკვაციური უნიფიკაციის დროს ვეძებთ ისეთ ჩასმებს, რომლებიც აქცევს ტერმებს ტოლს E თეორიით. E-უნიფიკაციის პრობლემა არის შემდეგი სახის ტოლობების სასრული სიმრავლე

$$\Gamma = \{s_1 \doteq^?_E t_1, \ldots, s_n \doteq^?_E t_n\},$$

სადაც $s_i, t_i \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{V})$.

Γ-ს E-უნიფიკატორი არის ჩასმა σ ისეთი, რომ

$$s_1\sigma \doteq_E t_1\sigma, \ldots, s_n\sigma \doteq_E t_n\sigma.$$

ცხადია, სინტაქსური უნიფიკაცია, კერძო შემთხვევაა ეკვაციური უნიფიკაციის, როცა $E = \emptyset$. შესაბამისად, ყოველი სინტაქსური უნიფიკატორი E-უნიფიკაციის პრობლემის წარმოადგენს ასევე მის E-უნიფიკატორს. თუ, $E \neq \emptyset$, მაშინ Γ ტოლობათა სისტემას შეიძლება ჰქონდეს უნიფიკატორს, რომელიც არ არის სინტაქსური უნიფიკატორი. მაგალითად, ტერმები $f(a, x)$ და $f(b, y)$ არ არიან სინტაქსურად უნიფიცირებადი, მაშინ როცა უნიფიცირებადია კომუტაციური თეორიის მიმართ ჩასმით $\{x \mapsto b, y \mapsto a\}$.

დავუშვათ, E არის ეკვაციური თეორია და Γ E-უნიფიკაციის პრობლემების სიმრავლე. Γ სიმრავლის *უნიფიკაციის ტიპები* განსაზღვრულია [3]-ში შემდეგნაირად:

- *უნიტარული,* თუ Γ-ს აქვს მაქსიმუმ ერთი ამონახსენი,
- *სასრული*, თუ Γ აქვს სასრული რაოდენობის ერთზე მეტი განსხვავებული ამონახსენი.
- *უსასრულო,* თუ Γ აქვს უსასრულო რაოდენობის განსხვავებული ამონახსენი.
- *ნული,* თუ Γ არ აქვს ამონახსთა მინიმალური სრული სიმრავლე .

5 უნიფიკაციის პრობლემა ოთხნიშნა განზოგადოებულ პოსტის ალგებრაში

ჩვენ ახლა განვსაზღვრავთ MV-ალგებრას.

განსაზღვრება 1 *ალგებრას* $A = (A; \otimes, \oplus, \neg, 0, 1)$ *ეწოდება* MV*-ალგებრა თუ ის აკმაყოფილებს შემდეგ პირობებს:*

$$
\begin{aligned}
(x \oplus y) \oplus z &= x \oplus (y \oplus z)\\
x \oplus y &= y \oplus x\\
x \oplus 0 &= x\\
x \oplus 1 &= 1\\
\neg 0 &= 1\\
\neg 1 &= 0\\
x \otimes y &= \neg(\neg x \oplus \neg y)\\
\neg(\neg x \oplus y) \oplus y &= \neg(\neg y \oplus x) \oplus x
\end{aligned}
$$

ყოველი MV-ალგებრა ეფუძნება დალაგებულ სტრუქტურას, რომელიც განსაზღვრულია შემდეგნაირად:

$$x \leq \text{y მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა} \neg x \oplus y = 1$$

უფრო მეტიც, ყოველი MV-ალგებრისთვის სრულდება შემდეგი თვისება:

$$x \oplus y \leq x \wedge y \leq x \vee y \leq x \otimes y$$

MV-ალგებრის მარტივ მაგალითად შეიძლება განვიხილოთ $A = [0, 1]$ შემდეგი ოპერაციებით:

$$
\begin{aligned}
x \oplus y &= \mathsf{min}(1, x + y)\\
x \otimes y &= \mathsf{max}(0, x + y - 1)\\
\neg x &= 1 - x
\end{aligned}
$$

აღსანიშნავია, რომ MV-ალგებრის სხვადასხვა მაგალითები მიიღება სტანდარტული MV-ალგებრის A უნივერსის $[0, 1]$ ინტერვალის შეზღუდვით თანაბარად დაშორებულია n ნამდვილი რიცხვით (შეიცავს 0 და 1-ს), რაც წარმოადგენს სიმრავლეს $\{0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-1}, \ldots, 1$ და ამ სიმრავლეზე $\otimes, \oplus, \neg$ ჩაკეტილი ოპერაციების განსაზღვრით.

განსაზღვრება 2 *ვიტყვით, რომ $I \subset A$ არის იდეალი, თუ შემდეგი პირობები სრულდება:*

$$\begin{aligned} &0 \in I, \\ \text{თუ } x, y \in I,\ &\text{ მაშინ } x \otimes y \in I, \\ \text{თუ } x \in I \text{ და } y \leq x,\ &\text{ მაშინ } x \in I. \end{aligned}$$

განსაზღვრება 3 *ალგებრას $(A, \vee, \wedge, \bigoplus, \bigodot, \neg, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ ეწოდება განზოგადოებული 4-ნიშნა პოსტის ალგება, თუ $(A, \bigoplus, \bigodot, \neg, 0, 1)$ არის S_3^{ω}-ალგებრა, რომელიც განსაზღვრულია [5]-ში. რაც ნიშნავს, რომ MV-ალგებრა $(A, \bigoplus, \bigodot, \neg, 0, 1)$ აკმაყოფილებს იგივეობას:*

$$(4(x^3))^2 = 2(x^4)$$

და $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ არის დისტრიბუციული მესერი, რომელიც აკმაყოფილებს პირობებს:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{3} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{3} && \frac{1}{3} \otimes \frac{1}{3} = 0 \\ &\frac{2}{3} \oplus \frac{2}{3} = 1 && \frac{2}{3} \otimes \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ &\frac{1}{3} \otimes (x \wedge \neg x) = 0 && \neg\frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ &\frac{2}{3} \oplus (x \vee \neg x) = 0 && \neg\frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

მაგალითად, $(\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}, \vee, \wedge, \bigoplus, \bigodot, \neg, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)$ 4-ნიშნა განზოგადოებული პოსტის ალგებრაა, სადაც აკმაყოფილებენ შემდეგ პირობებს:

$$\begin{aligned} x \vee y &= \mathsf{max}(x, y) \\ x \wedge y &= \mathsf{min}(x, y) \\ x \bigoplus y &= min(1, x + y) \\ x \bigodot y &= \mathsf{max}(0, x + y - 1) \\ \neg x &= 1 - x \end{aligned}$$

თუ გვაქვს ეკვაციური თეორია E, V_E არის მრავალსახეობა E მოდელით, ე. ი. ეს არის ალგებრების კატეგორია, რომლებიც აკმაყოფილებენ ტოლობებს E-დან შესაბამისი მორფიზმებით.
წარმოდგენადობა არის წყვილი (X,S), რომელიც შედგება X სიმრავლისგან და სიმრავლე S ტოლობებისგან ცვლადებით X სიმრავლიდან. წარმოდგენადობას ეწოდება სასრულად წარმოდგენადი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ორივე X და S სასრულებია. თუ გვაქვს წარმოდგენადობა (X,S), ჩვენ შეგვიძლია ავაგოთ ალგებრა $F(X,S) \in V_E$ შემდეგნაირად: ვიღებთ ყველა სიმრავლეს ცვლადებით X-დან და დავაწევრიანებთ მათ ექვივალენტობის მიმართებით

$$t \sim s \text{ მაშინ და მხოლოდ მაშინ,როცა } S \vdash_E t = s.$$

ოპერაციები განისაზღვრება შემდეგნაირად:

$$f([t_1], \ldots, [t_n]) = [f(t_1, \ldots, t_n)].$$

აღვნიშნოთ, რომ F(X,S) ერთადერთია იზომორფიზმის სიზუსტით; როცა S ცარიელია, მაშინ ჩვენ ვწერთ F(X) და ვუწოდებთ თავისუფალ ალგებრას თავისუფალი წარმომქმნელებით X.

ვიტყვით, რომ A *სასრულად წარმოდგენადია*, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა $A \cong F(X,S)$ რომელიმე სასრულად წარმოდგენადობისთვის (X,S).

ობიექტს P ეწოდება *პროექციული*, მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ნებისმიერი სურექციული ჰომომორფიზმისთვის $q : A \to B$ და ყოველი ჰომომორფიზმისთვის $f : P \to B$, არსებობს ჰომომორფიზმი $g : P \to A$ ისეთი, რომ qg = f.

ლემა 1. *დავუშვათ, $P \in V_E$ სასრულად წარმოდგენადია. შემდეგი მტკიცებულებები ექვივალენტურია:*

(i) P პროექციული ობიექტია V_E -ში;
(ii) P არის თავისუფალი ალგებრის F(X) რეტრაქტი რომელიმე სასრული X-სთვის (ე. ი. არსებობს ჰომომორფიზმები $m : P \to F(X)$ და

$q : F(X) \to P$*, ისეთები, რომ* $q \circ m = 1_P$ *).*

დამტკიცება. დამტკიცება ანალოგიურია, რომელიც მოცემულია [2]-ში.

ალგებრულად განვსაზღვროთ E-უნიფიკაცია. *E-უნიფიკაციის პრობლემა* არის სასრულად წარმოდგენადი ალგებრა A და მისი ამოხსნა (უნიფიკაცია) არის წყვილი, რომელიც მოცემულია სასრულად წარმოდგენადი ალგებრით P და ჰომომორფიზმით $u : A \to P$. A-სთვის უნიფიკაციების სიმრავლე აღინიშნება $U_E(A)$-ით.

ვიტყვით, რომ A არის უნიფიცირებადი, თუ $U_E(A)$ არ არის ცარიელი. როცა გვაქვს სხვა ალგებრული უნიფიკაცია $w : A \to Q$, ჩვენ ვამბობთ, რომ u უფრო ზოგადია, ვიდრე w, იწერება $w \preceq u$, თუ არსებობს ჰომორფიზმი $g : P \to Q$ ისეთი, რომ w = gu. სასრულად წარმოდგენადი A ალგებრის ყველა ალგებრულ უნიფიკაციათა სიმრავლე $U_E(A)$ ქმნის კვაზიდალაგებულ სიმრავლეს.

თეორემა 4 *უნიფიკაციის ტიპი განზოგადოებულ 4-ნიშნა პოსტის ალგებრათა კლასში არის 1, ე. ი . უნიტარული.*

დამტკიცება. ანალოგიურია, როგორც [2]-ში.

დასკვნა

ნაშრომში შესწავლილია და ზოგადად განხილულია უნიფიკაციის პრობლემა როგორც სინტაქსურად, ასევე ალგებრულად. კერძოდ, უნიფიკაციის პრობლემა განხილულია განზოგადოებულ 4-ნიშნა პოსტის ალგებრათა კლასში. მიღებულია შედეგი: *უნიფიკაციის ტიპი განზოგადოებულ 4-ნიშნა პოსტის ალგებრათა კლასში არის 1, ე. ი . უნიტარული.*

გამოყენებული ლიტერატურა

?refname?

[1] Franz Baader and Wayne Snyder. Unification theory. *Handbook of automated reasoning*, 1:445–532, 2001.

[2] Antonio Di Nola, Revaz Grigolia, Giacomo Lenzi, et al. Structural completeness and unification problem of the logic of chang algebra. *Azerbaijan Journal of Mathematics*, 6(1):23–38, 2016.

[3] Silvio Ghilardi. Unification through projectivity. *Journal of Logic and Computation*, 7(6):733–752, 1997.

[4] John Harrison. *Handbook of practical logic and automated reasoning*. Cambridge University Press, 2009.

[5] Yuichi Komori. Super-łukasiewicz propositional logics. *Nagoya Mathematical Journal*, 84:119–133, 1981.

[6] John W Lloyd. *Foundations of logic programming*. Springer Science & Business Media, 2012.

[7] Jörg H Siekmann. Unification theory. *Journal of Symbolic computation*, 7(3-4):207–274, 1989.