ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

გოგი კეჟერაძე

ფურიეს მწკრივების წერტილოვანი კრებადობა

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

მათემატიკის დეპარტამენტი

დოქტორანტის სემინარი 1

ხელმძღვანელი: თსუ-ს ასოცირებული პროფესორი, ფიზიკა-მათემატიკის მეცნიერებათა დოქტორი თეიმურაზ ახობაძე

თბილისი 2024

სარჩევი

ანოტაცია

ნაშრომში განხილულია ფურიეს მწკრივებთან დაკავშირებული აქტუალური საკითხები. კერძოდ, მოყვანილია ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ფუნქცია და მასთან დაკავშირებული უტოლობა, რომელსაც დიდი გამოყენება აქვს ფურიეს მწკრივების კრებადობასთან დაკავშირებული სხვადასხვა თეორემის დამტკიცებისას. ასევე, მოყვანილია ფურიეს მწკრივების წერტილოვან კრებადობასთან დაკავშირებული დებულებები. კერძოდ, ჟორდანისა და დინის ტესტი [1].

1 ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური უტოლობა

1.1 შესავალი

როგრც ცნობილია 1966 წელს კარლესონმა დაამტკიცა ლუზინის ჰიპოთეზა, რომელიც მან ჩამოაყალიბა 1913 წელს. მტკიცება დამოკიდებული იყო ბევრ შედეგზე, რომელიც დამტკიცდა ამ დებულების ჩამოყალიბებიდან 50 წლის განმავლობაში. ჩვენ განვიხილავთ შესაბამის დებულებებს. კერძოდ, განვიხილავთ მაქსიმალურ ოპერატორს, რომელიც დიდ როლს ასრულებს წერტილოვან კრებადობასთან მიმართებაში. მის ერთ-ერთ შედეგს წარმოადგენს განსაზღვრული ინტეგრალის დიფერენცირებადობის პრობლემის გადაჭრა.

$f \in \mathcal{L}^1(\mathbf{R})$ ფუნქციისთვის დაისმის საკითხი შემდეგი განსაზღვული ინტეგრალის დიფერენცირებადობის თვისებებთან დაკავშირებით

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

ეს კი ტოლფასია საკითხის, იმასთან დაკავშირებით თუ როდის არსებობს ზღვარი

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(t)dt.$$

ამ საკითხის დამუშავებისთვის სასურველია შევისწავლოთ შესაბამისი მაქსიმალური ფუნქცია,

$$\sup_h \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt \right|$$

ანალოგიური შედეგი n-განზომილებიან შემთხვევაში იქნება

$$f(x) = \lim_{Q\searrow x} \frac{1}{|Q|} \int_Q f(t)dt, \tag{1}$$

სადაც Q აღნიშნავს კუბს ცენტრით x წერტილში, რომლის გვერდის სიგრზეა h. ჩვენ ვწერთ $Q \searrow x$ იმის აღსანიშნავად, რომ გვერდის სიგრძე $h \to 0^+$. ერთგანზომილებიან სივრცეში ჩვენ გვაქვს $Q = [x-h, x+h]$. ის განსხვავება, რომ ინტეგრება ხდება $[x, x+h]$ ინტერვალის ნაცვლად $[x-h, x+h]$ ინტერვალზე, როგორც ვნახავთ, საბოლოო შედეგზე გავლენას არ ახდენს. ყოველი ლოკალურად ინტეგრებადი ფუნქციისთვის $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{C}$, ჩვენ განვსაზღვრავთ

$$\mathcal{M}f(x) = \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)|dt,$$

სადაც სუპრემუმი აღებულია კუბების სიმრავლეზე $Q \subset \mathbf{R}^n$, ცენტრით x წერტილში. $\mathcal{M}f$ ეწოდება ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ფუნქცია.

1.2 სუსტი უტოლობა

პირველ რიგში დავაკვირდეთ, რომ ლოკალურად ინტეგრებადი f ფუნქციისთვის $\mathcal{M}f : \mathbf{R}^n \to [0,+\infty]$ ფუნქცია არის ზომადი. კერძოდ, ყოველი დადებითი ნამდვილი α რიცხვისთვის, წერტილთა სიმრავლე სადაც $\{\mathcal{M}f(x) > \alpha\}$ არის ღია, ვინაიდან მოცემული $x \in \mathbf{R}^n$-თვის, რომლის შესაბამისი $\mathcal{M}f(x) > \alpha$, არსებობს Q კუბი ცენტრით x წერტილში ისეთი, რომ

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)|dt > \alpha.$$

ჩვენ მხოლოდ უნდა შევნიშნოთ, რომ ფუნქცია

$$y \mapsto \frac{1}{|Q|}\int_{y+Q} |f(t)|dt$$

არის უწყვეტი.

თუ $f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^n)$, სადაც $1 < p < +\infty$, ჩვენ უნდა ვაჩვენოთ რომ $\mathcal{M}f \in \mathcal{L}^p(\mathbf{R}^n)$. თუმცა, $p = 1$-თვის ეს აღარ არის ჭეშმარიტი. რაც დანამდვილებით შეგვიძლია ვთქვათ არის ის, რომ f ეკუთვნის სუსტ - $\mathcal{L}^1$ სივრცეს. რაც ტოლფასია შემდეგი უტოლობის

$$\mathfrak{m}\{\mathcal{M}f(x) > \alpha\} \leq c_n \frac{\|f\|_1}{\alpha}.$$

მართლაც, წერტილთა სიმრავლე სადაც $\mathcal{M}f(x) > \alpha$ იფარება კუბებით, სადაც $|f|$-ის საშუალო მეტია α-ზე. თუ ამ სიმრავლეს დიდი ზომა აქვს, ჩვენ გვექნება მრავალი ასეთი კუბი. ჩვენ შეგვიძლია შევარჩიოთ წყვილ-წყვილად თანაუკვეთი კუბების გარკვეული ქვეოჯახი და აქედან გამომდინარე f-ის ნორმა არის დიდი.

მოცემული მტკიცების ყველაზე დელიკატური მომენტი არის თანაუკვეთი კუბების არჩევა. ეს უკანასკნელი განმტკიცებულია დაფარვასთან დაკავშირებული შემდეგი ლემით.

ლემა 1. *(დაფარვის ლემა) ვთქვათ, $\mathbf{R}^d$ აღჭურვილია გარკვეული ნორმით და $c_d = 2 \cdot 3^d$. თუ $A \subset \mathbf{R}^d$ არის არაცარიელი, სასრული გარე ზომის სიმრავლე და $\mathcal{U}$ არის A-ს დაფარვა ღია ბირთვებით, მაშინ მათგან გამოიყოფა თანაუკვეთი ბირთვების სასრული რაოდენობა $B_1, \ldots, B_n$ ისეთი, რომ*

$$c_d \sum_{j=1}^{n} \mathfrak{m}(B_j) \geq \mathfrak{m}^*(A).$$

დამტკიცება. ჩვენ შეგვიძლია დავუშვათ, რომ A არის ზომადი, იმიტომ რომ თუ არ არის ზომადი მაშინ არსებობს ღია სიმრავლე $G \supset A$ სასრული $\mathfrak{m}(G)$ ზომით ისეთი, რომ $\mathcal{U}$ იქნება G-ს დაფარვა. A-ს ზომადობიდან გამომდინარე არსებობს კომპაქტური სიმრავლე $K \subset A$ ისეთი, რომ $\mathfrak{m}(K) \geq \mathfrak{m}(A)/2$. ახლა, შევარჩიოთ K-ს სასრული ქვედაფარვა ღია ბირთვებით $U_1, U_2, \ldots, U_m$. დავუშვათ ეს ბირთვები დალაგებულია რადიუსების კლების

მიხედვით. მაშინ ჩვენ B_j-ებს შევარჩევთ შემდეგი გზით. $B_1 = U_1$ არის ყველაზე დიდი ბირთვი. მაშინ B_2 არის პირველი ბირთვი U_j-ების მიმდევრობაში, რომელიც თანაუკვეთია B_1-თან, თუ არსებობს ასეთი, წინააღმდეგ შემთხვევაში გვაქვს $n = 1$. B_3 იქნება პირველი ბირთვი U_j-ების მიმდევრობაში, რომელიც თანაუკვეთია $B_1 \cup B_2$. ამ პროცესს ვაგრძელებთ მანამდე, სანამ აღარ იარსებებს U_j, რომელიც არ თანაიკვეთება არცერთ B_j-თან.

ახლა უნდა ვაჩვენოთ, რომ $K \subset \bigcup_{j=1}^{n} 3B_j$. ჩვენ ვიცით, რომ $K \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_j$. შესაბამისად, ყოველი $x \in K$-თვის არსებობს პირველი j ისეთი რომ $x \in U_j$. თუ მოცემული U_j რომელიღაც B_k ტოლია, მაშინ აშკარად გვაქვს $x \in B_k \subset 3B_k$. სხვა შემთხვევაში U_j იკვეთება რომელიღაც $B_k = U_s$-თან. შევარჩიოთ მინიმალური k ასეთებს შორის, მაშინ გვექნება $s < j$, რადგან წინააღმდეგ შემთხვევაში, მოცემულ პროცესში B_k-ს ნაცვლად შევარჩევდით U_j-ს. აქედან გამომდინარე B_k-ს რადიუსი მეტია ან ტოლი U_j-ს რადიუსზე. მაშასადამე, $U_j \subset 3B_k$. აქედან გამომდინარე

$$\frac{1}{2}\mathfrak{m}(A) \leq \mathfrak{m}(K) \leq \sum_{j=1}^{n} 3^d \mathfrak{m}\left(B_j\right),$$

და ბირთვების აღების კონსტრუქციიდან გამომდინარე ისინი თანაუკვეთია.

■

ლემა 2. *(ჰარდი ლიტლვუდი) თუ* $f \in \mathcal{L}^1\left(\mathbf{R}^d\right)$ *მაშინ ყოველი* $\alpha > 0$*-თვის* $\mathcal{M}f$ *აკმაყოფილებს სუსტ უტოლობას*

$$\mathfrak{m}\left\{x \in \mathbf{R}^d \mid \mathcal{M}f(x) > \alpha\right\} \leq c_d \frac{\|f\|_1}{\alpha}.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $A = \left\{x \in \mathbf{R}^d \mid \mathcal{M}f(x) > \alpha\right\}$, ეს სიმრავლე არის ღია. ჯერ-ჯერობით არ ვიცით არის თუ არა ეს სიმრავლე სასრული ზომის, ამიტომ შემოვიღოთ სიმრავლე $A_n = A \cap B_n$, სადაც B_n არის ბირთვი რადიუსით n და ცენტრით 0. ყოველი $x \in A_n$-თვის გვაქვს $\mathcal{M}f(x) > \alpha$; მაშასადამე, არსებობს ღია კუბი Q, ცენტრით x წერტილში ისეთი, რომ

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q |f(t)|dt > \alpha. \tag{2}$$

კუბი არის ბირთვი $\|\cdot\|_\infty$ ნორმისთვის $\mathbf{R}^d$-ზე. შესაბამისად შეგვიძლია გამოვიყენოთ "დაფარვის ლემა რომლის თანახმად გამოიყოფა თანაუკვეთი კუბების სასრული რაოდენობა $(Q_j)_{j=1}^m$ ისეთი, რომ

$$\mathfrak{m}\left(A_n\right) \leq c_d \sum_{j=1}^{m} \mathfrak{m}\left(Q_j\right).$$

აქედან გამომდინარე გვაქვს

$$\mathfrak{m}(A_n) \leq c_d \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\alpha} \int_{Q_j} |f(t)|dt.$$

ვინაიდან კუბები თანაუკვეთია

$$\mathrm{m}(A_n) \leq c_d \frac{\|f\|_1}{\alpha}.$$

თუ გადავალთ ზღვარზე როცა $n \to \infty$, მივიღებთ სასურველ შედეგს.

■

1.3 დიფერენცირებადობა

ჩვენ გვსურს ვაჩვენოთ (1)-ის მართებულობა. ფაქტიურად, ჩვენ შეგვიძლია დავამტკიცოთ უფრო მეტიც. თითქმის ყველა $x \in \mathbf{R}^d$ წერტილისთვის ჩვენ გვაქვს არა მხოლოდ

$$\lim_{Q \searrow x} \frac{1}{|Q|} \left| \int_Q (f(t) - f(x))dt \right| = 0,$$

არამედ, უფრო მეტიც

$$\lim_{Q \setminus x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f(x)|dt = 0.$$

წერტილები, სადაც ეს უკანასკნელი არის ჭეშმარიტი ეწოდებათ f ფუნქციის ლებეგის წერტილები.

თეორემა 1. *(დიფერენცირებადობის თეორემა) ვთქვათ, $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ არის ლოკალურად ინტერგებადი ფუნქცია. არსებობს ნული ზომის ქვესიმრავლე $Z \subset \mathbf{R}^d$ ისეთი, რომ ყოველი $x \notin Z$ წერტილი არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი. ანუ*

$$\lim_{Q \setminus x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f(x)|dt = 0.$$

დამტკიცება. დავაკვირდეთ, რომ x არის თუ არა f ფუნქციის ლებეგის წერტილი დამოკიდებულია f-ის მნიშვნელობებზე მხოლოდ x წერტილის მიდამოში. აქედან გამომდინარე ეს საკითხი დაიყვანება f ფუნქციის ინტეგრებადობამდე.

ასევე, ეს შედეგები სამართლიანია $\mathcal{L}^1\left(\mathbf{R}^d\right)$-ში მკვრივი სიმრავლისთვის. თუ f ფუნქცია უწყვეტია, მოცემული x და $\varepsilon > 0$-თვის, არსებობს x-ის მიდამო ისეთი რომ $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. მაშასადამე, თუ Q აღნიშნავს კუბს საკმარისად მცირე დიამეტრით, მაშინ გვაქვს

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t) - f(x)|dt \leq \varepsilon.$$

აქედან გამომდინარე, უწყვეტი f ფუნქციისთვის, ყველა წერტილი ლებეგის წერტილია. ახლა, ჩვენ გვაინტერესებს მაქსიმალური ფუნქციის ყოფაქცევა წერტილოვან კრებადობასთან დაკავშირებით. ჩვენ განვსაზღვრავთ ოპერატორს Ω. თუ $f \in \mathcal{L}^1\left(\mathbf{R}^d\right)$,

$$\Omega f(x)=\limsup_{Q \backslash x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(t)-f(x)| dt.$$

შევნიშნოთ, რომ

$$\Omega f(x) \leq \mathcal{M} f(x)+|f(x)|.$$

ჩვენი მიზანია ვაჩვენოთ, რომ $\Omega f(x)=0$ თითქმის ყველგან. დავაფიქსიროთ $\varepsilon>0$. ვინაიდან უწყვეტ ფუნქციათა სიმრავლე მკვრივია $\mathcal{L}^1\left(\mathbf{R}^d\right)$-ში, ავიღოთ უწყვეტი $\varphi \in \mathcal{L}^1\left(\mathbf{R}^d\right)$ ისეთი, რომ $\|f-\varphi\|_1<\varepsilon$. სამკუთხედის უტოლობით გვაქვს

$$\begin{aligned}
\Omega f(x) &\leq \Omega \varphi(x)+\Omega(f-\varphi)(x)=\Omega(f-\varphi)(x) \\
&\leq \mathcal{M}(f-\varphi)(x)+|f(x)-\varphi(x)|.
\end{aligned}$$

აქედან გამომდინარე ყოველი $\alpha>0$-თვის გვაქვს

$$\{\Omega f(x)>\alpha\} \subset\{\mathcal{M}(f-\varphi)(x)>\alpha / 2\} \cup\{|f(x)-\varphi(x)|>\alpha / 2\}.$$

ახლა, თუ გამოვიყენებთ სუსტ უტოლობას ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ფუნქციისთვის და ჩებიშევის უტოლობას $|f-\varphi|$-თვის, მივიღებთ

$$\mathfrak{m}\{\Omega f(x)>\alpha\} \leq 2 c_d \frac{\|f-\varphi\|_1}{\alpha}+2 \frac{\|f-\varphi\|_1}{\alpha} \leq C_d \frac{\varepsilon}{\alpha}.$$

ვინაიდან ეს უტოლობა ჭეშმარიტია ყოველი $\varepsilon>0$-თვის, მივიღებთ $\mathfrak{m}\{\Omega f(x)>\alpha\}=0$. და ეს ჭეშმარიტია ყოველი $\alpha>0$-თვის, მაშასადამე $\Omega f(x)=0$ თითქმის ყველგან. დავამტკიცოთ, რომ

$$F(x)=\int_{-\infty}^x f(t) dt$$

დიფერენცირებადია f-ის ყველა ლებეგის წერტილში. დავუშვათ, რომ f ინტეგრებადია. $h>0$-თვის გვაქვს

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)=\frac{1}{h} \int_x^{x+h}(f(t)-f(x)) dt.$$

აქედან გამომდინარე

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h}-f(x)\right| &\leq \frac{1}{h} \int_x^{x+h}|f(t)-f(x)| dt \\
&\leq \frac{2}{2 h} \int_{x-h}^{x+h}|f(t)-f(x)| dt.
\end{aligned}$$

თუ x არის f ფუნქციის ლებეგის წერტილი, მაშინ უკანასკნელი გამოსახულების ზღვარი როცა $h \to 0$ იქნება 0. ანალოგიური პროცედურა ამტკიცებს x-ში მარცხენა ზღვარის არსებობას.

მაქსიმალურ ფუნქციებთან დაკავშირებით შეიძლება განხილულ იქნას მასალა (იხ. [2], i თავი, მე-13 პარაგრაფი).

1.4 ინტერპოლაცია

უკიდურეს შემთხვევაში, როცა $p = 1$, მაქსიმალური ფუნქცია $\mathcal{M}f$ აკმაყოფილებს სუსტ უტოლობას. მეორე უკიდურეს შემთხვევაში $p = +\infty$, აშკარაა განსაზღვრებიდან, რომ თუ $f \in \mathcal{L}^\infty\left(\mathbf{R}^d\right)$

$$\|\mathcal{M}f\|_\infty \leq \|f\|_\infty.$$

მარცინკევიჩის იდეა საშუალებას გვაძლევს დასკვნები გამოვიტანოთ გარდამავალი შემთხვევებისთვის.

თეორემა 2. *ყოველი $f \in \mathcal{L}^p\left(\mathbf{R}^d\right)$-თვის, $1 < p < +\infty$, გვაქვს*

$$\|\mathcal{M}f\|_p \leq C_d \frac{p}{p-1}\|f\|_p.$$

დამტკიცება. ყოველი $\alpha > 0$-თვის დავშალოთ f შემდეგნაირად, $f = f\chi_A + f\chi_{\mathbf{R}^d \setminus A}$, სადაც $A = \{|f| > \alpha\}$. მაშინ $\mathcal{M}f \leq \alpha + \mathcal{M}\left(f\chi_A\right)$. შესაბამისად,

$$\mathfrak{m}\{\mathcal{M}f > 2\alpha\} \leq \mathfrak{m}\left\{\mathcal{M}\left(f\chi_A\right) > \alpha\right\} \leq \frac{c_d}{\alpha}\int_{\mathbf{R}^d}|f|\chi_{\{|f|>\alpha\}}d\mathfrak{m}.$$

დამტიცება მოითხოვს ამ უტოლობის რამდენჯერმე გამოყენებას. კერძოდ სხვადასხვა f α-თვის გვაქვს f ფუნქციის სხვადასხვა დეკომპოზიცია. ჩვენ გვაქვს უტოლობათა შემდეგი ჯაჭვი

$$\|\mathcal{M}f\|_p^p = p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\,\mathrm{m}\{\mathcal{M}f > t\}dt \leq$$
$$p\int_0^{+\infty} t^{p-1}\frac{2c_d}{t}\int_{\mathbf{R}^d}|f|\chi_{\{|S|>t/2\}}d\,\mathrm{m}dt \leq$$

(ფუბინის თეორემის თანახმად გვექნება)

$$2c_dp\int_{\mathbf{R}^d}|f(x)|\int_0^{+\infty} t^{p-2}\chi_{\{|f(x)|>t/2\}}dtdx =$$
$$2c_dp\int_{\mathbf{R}^d}\frac{(2|f(x)|)^{p-1}}{p-1}|f(x)|dx = \frac{2^pc_dp}{p-1}\|f\|_p^p$$

მარტივი დასანახია,რომ $(p/(p-1))^{1/p}$ არის $p/(p-1)$ სიდიდის ტოლფასი. რაც ამტკიცებს სასურველ უტოლობას. ■

$p=1$ შემთხვევაში საუკეთესო შედეგი არის ის, რომ გვაქვს სუსტი უტოლობა. მაგალითად, თუ $\|f\|_1>0$, მაშინ $\mathcal{M}f$ არ არის ინტეგრებადი. ამ მიზეზით კარლესონის თეორემის დამტკიცებისთვის ჩვენ მოგვიწევს სასრული ზომის სიმრავლეზე მაქსიმალური ფუნქციიდან ინტეგრალის საზღვრის განხილვა, რაც წარმოადგენს სუსტი უტოლობის შედეგს.

წინადადება 1. *ყოველი $f\in\mathcal{L}^1\left(\mathbf{R}^d\right)$ ფუნქციისა და $B\subset\mathbf{R}^d$ ზომადი სიმრავლისთვის*

$$\int_B\mathcal{M}f(x)dx\leq\mathrm{m}(B)+2c_d\int_{\mathbf{R}^d}|f(x)|\log^+|f(x)|dx.$$

დამტკიცება. ვთქვათ, $\mathfrak{m}_B$ არის შემდეგი ზომა $\mathfrak{m}_B(M)=\mathfrak{m}(B\cap M)$. ჩვენ გვაქვს

$$\int_B\mathcal{M}f(x)dx=\int_0^{+\infty}\mathrm{m}_B\{\mathcal{M}f(x)>t\}dt.$$

მაშასადამე, გვაქვს ორი უტოლობა: $\mathfrak{m}_B\{\mathcal{M}f(x)>t\}\leq\mathfrak{m}(B)$ და სუსტი უტოლობა.

დამტკიცების ამოსავალი წერტილი არის სუსტი უტოლობის ადეკვატურად გამოყენება. ყოველი α-თვის გვაქვს $f=f\chi_A+f\chi_{\mathbf{R}^d\setminus A}$, სადაც $A=\{f(x)>\alpha\}$. აქედან გამომდინარე $\mathcal{M}f\leq\alpha+\mathcal{M}\left(f\chi_A\right)$ და

$$\{\mathcal{M}f(x)>2\alpha\}\subset\{\mathcal{M}\left(f\chi_A\right)(x)>\alpha\}.$$

საიდანაც გვექნება

$$\mathfrak{m}\{\mathcal{M}f(x)>2\alpha\}\leq\frac{c_d}{\alpha}\int_{\{|f(x)|>\alpha\}}|f(x)|dx.$$

აქედან გამომდინარე,

$$\int_B\mathcal{M}f(x)dx\leq\mathfrak{m}(B)+2\int_1^{+\infty}\frac{c_d}{t}\left(\int_{\{|f(x)|>t\}}|f(x)|dx\right)dt,$$

საიდანაც ფუბინის თეორემის გამოყენებით გვექნება

$$\int_B\mathcal{M}f(x)dx\leq\mathfrak{m}(B)+2c_d\int_{\mathbf{R}^d}|f(x)|\log^+|f(x)|dx.$$

1.5 ზოგადი უტოლობა

ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალური ფუნქცია გამოიყენება წერტილოვან კრებადობასთან დაკავშირებული მრავალი თეორემის დასამტკიცებლად. ამ ფუნქციების ეს და მრავალი სხვა გამოყენება მიიღება შემდეგი უტოლობიდან.

თეორემა 3. *ვთქვათ, $\varphi:\mathbf{R}^d\to\mathbf{R}$ არის დადებითი, რადიალური, კლებადი და ინტეგრებადი ფუნქცია. მაშინ ყოველი $f\in\mathcal{L}^p\left(\mathbf{R}^d\right)$ ფუნქციისთვის და $x\in\mathbf{R}^d$ გვაქვს*

$$|\varphi*f(x)|\leq C_d\|\varphi\|_1\mathcal{M}f(x),$$

სადაც C_d არის მუდმივი, რომელიც დამოკიდებულია მხოლოდ d განზომილებაზე და ტოლია 1-ის, როცა $d=1$.

დამტკიცება. ვიტყვით, რომ φ არის რადიალური თუ არსებობს ფუნქცია $u : [0, +\infty) \to \mathbf{R}$ ისეთი, რომ $\varphi(x) = u(|x|)$ ყოველი $x \in \mathbf{R}^d$-თვის. ასევე, ვიტყვით რომ რადიალური ფუნქცია φ კლებადია, თუ u არის კლებადი ფუნქცია.

რადგან u ზომადი ფუნქციაა, ამიტომ არსებობს მარტივ ფუნქციათა ზრდადი მიმდევრობა (u_n) ისეთი, რომ $u_n(t)$ მიმდევრობა კრებადია $u(t)$ ფუნქციისკენ ყოველი $t \geq 0$-თვის. ვინაიდან u კლებადია, u_n-ები შეგვიძლია შევარჩიოთ შემდეგი სახით

$$u_n(t) = \sum_{j=1}^{N} h_j \chi_{[0,t_j]}(t),$$

სადაც $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N$ და $h_j > 0$, ნატურალური რიცხვი N დამოკიდებულია n-ზე.

ახლა, დავამტკიცოთ უშუალოდ. ვთქვათ, $\varphi_n(x) = u_n(|x|)$. მონოტონური კრებადობის თეორემის გამოყენებით გვექნება

$$|\varphi * f(x)| \leq \varphi * |f|(x) = \lim_n \varphi_n * |f|(x).$$

აქედან გამომდინარე,

$$\varphi_n * |f|(x) = \sum_{j=1}^{N} h_j \int_{B(x,t_j)} |f(y)| dy.$$

ჩვენ შეგვიძლია ჩავანაცვლოთ ბირთვები $B\left(x, t_j\right)$ კუბებით ცენტრით x წერტილში, რომელთა წიბოს სიგრძეა $2t_j$. ბირთვისა და კუბის მოცულობათა შეფარდება მუდმივით არის შემოსაზღვული. ამიტომ

$$\varphi_n * |f|(x) \leq \sum_{j=1}^{N} h_j \, \mathrm{m}\left(Q\left(x_j, t_j\right)\right) \cdot \mathcal{M} f(x) \leq C_d \|\varphi\|_1 \mathcal{M} f(x).$$

2 ფურიეს მწკრივები

2.1 შესავალი

ვთქვათ, $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ არის 2π პერიოდული ფუნქცია, რომელიც ინტეგრებადია $[-\pi, \pi]$-ზე. f ფუნქციის ფურიეს მწკრივი არის

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j e^{ijt}, \tag{3}$$

სადაც a_j ფურიეს კოეფიციენტები განისაზღვრება შემდეგი ფორმულებით

$$a_j = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ijt} dt. \tag{4}$$

ფურიეს კოეფიციენტები აღინიშნება $\hat{f}(j) = a_j$ სიმბოლოთი. ეს მწკრივები განხილული იყო მე-18 საუკუნეში დანიელ ბერნულის, ეილერის, და ლაგრანჟის მიერ. მათ იცოდნენ, რომ თუ ფუნქცია მოცემულია (3) მწკრივით, მაშინ კოეფიციენტები გამოითვლება (4) ფორმულით. მათ ასევე იცოდნენ მრავალი პრაქტიკული მაგალითი.

ბერნული სწავლობდა ბოლოებში დამაგრებული სიმის მოძრაობას, და მოგვცა გამოსახულება, რომელიც გვაძლევს სიმის მდგომარეობას

$$y(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin \frac{j\pi x}{\ell} \cos j\rho t,$$

სადაც ℓ წარმოადგენს სიმის სიგრძეს, ხოლო კოეფიციენტი ρ დამოკიდებულია სიმის ფიზიკურ თვისებებზე.

1753 წელს ეილერმა მიიღო პარადოქსული იმპლიკაცია: სიმის საწყისი მდგომარეობა უნდა იყოს მოცემული შემდეგი ფორმით

$$f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sin \frac{j\pi x}{\ell}.$$

ამ დროისთვის წირი კლასიფიცირდება როგორც უწყვეტი, თუ ის განისაზღვრება ფორმულით ან შესაძლებელია მისი დახაზვა ხელით.

ფურიემ თავის წიგნში "Théorie Analytique de la Chaleur"(1822) აღნიშნა, რომ ამ თეორიის განვითარება შესაძლებელი იყო ზოგად შემთხვევაშიც. ეს საკითხი დაკავშირებულია ფუნქციის ცნების განსაზღვრებასთან.

2.2 დირიხლეს გული

(3) მწკრივის კრებადობა განხილული იყო დირიხლეს მიერ 1829 წელს. მან დაამტკიცა, რომ მოცემული მწკრივი კრებადია $(f(x+0) + f(x-0))/2$-კენ ყოველ უბან-უბან უწყვეტი

და მონოტონური ფუნქციისთვის. ეს შემდგომში გავრცობილი იყო დინის და ჟორდანის შედეგებით. ამ შედეგების დასამტკიცებლად ჩვენ ჯერ განვიხილავთ რიმანის შედეგს.

წინადადება 2. *(რიმან-ლებეგის ლემა) თუ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ არის 2π-პერიოდული ფუნქცია და ინტეგრებადია $[-\pi, \pi]$-ზე, მაშინ*

$$\lim_{|j|\to\infty} \hat{f}(j) = 0.$$

დამტკიცება. თუ (4) ინტეგრალში შევცვლით ცვლადს $u = t + \pi/j$, მაშინ ექსპონენციალი იცვლის ნიშანს. ამიტომ გვექნება

$$\widehat{f}(j) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ijt}dt - \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(t - \frac{\pi}{j}\right)e^{-ijt}dt.$$

აქედან გამომდინარე, უწყვეტი f ფუნქციისთვის გვაქვს $\lim|\widehat{f}(j)| = 0$. ზოგადი f ფუნქციის შემთხვევაში ჩვენ ვუახლოვდებით მას უწყვეტი ფუნქციით $\mathcal{L}^1$ ნორმით.

წერტილოვანი კრებადობის შესასწავლად ჩვენ განვიხილავთ კერძო ჯამებს

$$S_n(f, x) = \sum_{j=-n}^{n} \widehat{f}(j)e^{ijx}.$$

ვინაიდან ყველა კოეფიციენტს აქვს ინტეგრალური ფორმა, ამიტომ ფურიეს მწკვრივის კერძო ჯამებიც წარმოდგება ამავე ფორმით:

$$S_n(f, x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(x - t)f(t)dt,$$

სადაც D_n ფუნქცია, დირიხლეს გული, მოიცემა შემდეგი ფორმულით

$$D_n(t) = \sum_{j=-n}^{n} e^{ijt} = \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{\sin t/2}.$$

აქედან გამომდინარე, $f \mapsto S_n(f, x)$ არის $\mathcal{L}^1[-\pi, \pi]$-ზე განსაზღვრული უწყვეტი წრფივი ფორმა.

D_n ფუნქცია არის 2π-პერიოდული, რომლიდანაც ინტეგრალი არის 1, მაგრამ $\|D_n\|_1$ და $\|D_n\|_\infty$ არ არის თანაბრად შემოსაზღვრული.

ფურიეს მწკვრივების კერძო ჯამების ინტეგრალურ წარმოდგენაზე დაყრდნობით შეგვიძლია მივიღოთ წერტილოვანი კრებადობის ორი ძირითადი პირობა.

თეორემა 4. *(დინის ტესტი) თუ $f \in \mathcal{L}^1[-\pi, \pi]$ და*

$$\int_0^{\pi} |f(x + t) + f(x - t) - 2f(x)|\frac{dt}{t} < +\infty,$$

მაშინ f ფუნქციის ფურიეს მწკვრივი კრებადია $f(x)$-კენ x წერტილში.

დამტკიცება. $S_n(f) - f$ სხვაობა შეიძლება შემდეგნაირად გადაიწეროს

$$S_n(f,x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)(f(x-t) - f(x))dt =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} D_n(t)(f(x+t) + f(x-t) - 2f(x))dt$$

ვინაიდან $2\sin t/2 \sim t$, რიმან-ლებეგის ლემის თანახმად უკანასკნელი სხვაობა მიისწრაფვის 0-კენ. ■

თეორემა 5. *(ჟორდანის ტესტი) თუ $f \in \mathcal{L}^1[-\pi,\pi]$ არის შემოსაზღვრული ვარიაციის x-ის შემცველ ღია ინტერვალზე, მაშინ ფურიეს მწკრივი x წერტილში კრებადია $(f(x+0) + f(x-0))/2$-კენ.*

დამტკიცება. დამტკიცება დაფუძნებულია იმ ფაქტზე, რომ მიუხედავად $\|D_n\|_1$-ის შემოუსაზღვრელობისა

$$\int_0^\delta D_n(t)dt$$

თანაბრად შემოსაზღვრულია n-ისა და δ-ს მიმართ. (ეს შეიძლება დამტკიცდეს დირიხლეს გულის ტოლფასი $\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)/t$ ფორმით ჩაწერისა და ცვლადის გარდაქმნის გამოყენებით.)

ზოგადობის დაურღვევლად შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ $x = 0$. ასევე, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ, რომ f არის ზრდადი 0-ის მიდამოში. ჩვენ უნდა დავამტკიცოთ

$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi D_n(t)(f(t) + f(-t))dt = (f(0+) + f(0-))/2.$$

სიმეტრიიდან გამომდინარე, საკმარისია დავამტკიცოთ

$$\lim_n \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi D_n(t)f(t)dt = f(0+)/2.$$

ბოლოს, შეგვიძლია ვიგულისხმოთ რომ $f(0+) = 0$. ავირჩიოთ $\delta > 0$ ისეთი რომ $0 \le f(t) < \varepsilon$, ყოველი $0 < t < \delta$-თვის. დავშალოთ ინტეგრალი ორ ნაწილად, ერთი $[0,\delta]$-ზე და მეორე $[\delta,\pi]$-ზე. პირველ ინტეგრალში ვიყენებთ საშუალო მნიშვნელობის მეორე თეორემას, რომელიც ყალიბდება შემდეგნაირად: თუ g არის უწყვეტი ფუნქცია და f მონოტონურია $[a,b]$-ზე, არსებობს $c \in [a,b]$ ისეთი, რომ

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = f(b-)\int_c^b g(t)dt + f(a+)\int_a^c g(t)dt.$$

აქედან გამომდინარე

$$\int_0^\pi D_n(t)f(t)dt = f(\delta-)\int_\eta^\delta D_n(t)dt + \int_\delta^\pi D_n(t)f(t)dt.$$

რიმან-ლებეგის ლემის გამოყენებით მივიღებთ, რომ მეორე ინტეგრალი კრებადია 0-კენ და პირველი, დირიხლეს გულის ერთ-ერთი თვისების გათვალისწინებით, ნაკლებია ვიდრე $C\varepsilon$.

ჩვენ ვნახეთ, რომ ეს პირობები მხოლოდ დამოკიდებულია f-ის მნიშვნელობებზე x-ის ნებისმიერად მცირე მიდამოში. ეს ზოგადი ფქტია და ის ცნობილია როგორც რიმანის ლოკალიზაციის პრინციპი: ფურიეს მწკვრივის $f(x)$-კენ კრებადობა დამოკიდებულია f-ის მნიშვნელობებზე მხოლოდ x-ის მიდამოში. ეს ცხადია $S_n(f,x)$-ის ინტეგრალური ფორმით წარმოდგენიდან და რიმან-ლებეგის ლემიდან გამომდინარე. ეს მოულოდნელია, რადგან ყოველი $\widehat{f}(j)$ დამოკიდებულია თითოეულ წერტილში f-ის მნიშვნელობაზე.

მოცემული ორი კრიტერიუმი ერთმანეთისგან დამოუკიდებელია. თუ $f(t) = 1/|\log(t/2\pi)|, g(t) = t^\alpha \sin(1/t)$, $0 < t < \pi$ და $0 < \alpha < 1$, მაშინ f აკმაყოფილებს ჟორდანის პირობას, მაგრამ არა დინის ტესტს $t = 0$ წერტილში. გარდა ამისა, g აკმაყოფილებს მხოლოდ დინის ტესტს.

2.3 უწყვეტი ფუნქციების ფურიეს მწკვრივები

დამტკიცებული კრებადობის პირობა გვიჩვენბს, რომ დიფერენცირებადი ფუნქციის ფურიეს მწკვრივი წერტილოვნად კრებადია ამ ფუნქციისკენ. ზოგადად, ეს არ არის ჭეშმარიტი უწყვეტი ფუნქციებისთვის. დი ბუა რეიმონდმა ააგო უწყვეტი ფუნქცია რომლის ფურიეს მწკვრივი განშლადია ერთ წერტილში.

ეს გამომდინარეობს ბანახ-შტეინჰაუზის თეორემიდან. ჩვენ განვიხილავთ $T_n(f) = S_n(f,0)$-ს როგორც $[-\pi,\pi]$-ზე უწყვეტ ფუნქციათა სივრცეზე განსაზღვრულ წრფივ ოპერატორს, რომელიც ბოლოებში ღებულობს ტოლ მნიშნელობას. ბანახ-შტეინჰაუზის თეორემის თანახმად $\sup_n \|T_n\| < +\infty$ მაშინ და მხოლოდ მაშინ როცა ყოველი $f \in \mathcal{C}(\mathbf{T})$ ფუნქციისთვის გვაქვს $\sup_N |T_n(f)| < +\infty$. მაგრამ გარკვეული გარდაქმნებით ვღებულობთ, რომ

$$\|T_n\| = \|D_n\|_1 = \frac{4}{\pi^2}\log n + O(1).$$

რიცხვებს $L_n = \|D_n\|_1$ უწოდებენ ლებეგის მუდმივებს. მათი რიგი შეიძლება გავარკვი-

ოთ შემდეგნაირად.

$$L_n = \frac{2}{2\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}\right| dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\right| dt + O(1)$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{(2n+1)\pi/2} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du + O(1) = \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \left|\frac{\sin u}{u}\right| du + O(1)$$
$$= \frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\int_0^\pi \left|\frac{\sin u}{k\pi+u}\right| du + O(1)$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sum_{k=1}^{n-1} \left|\frac{\sin u}{k\pi+u}\right| du + O(1) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k\pi+\xi} + O(1) = \frac{4}{\pi^2}\log n + O(1).$$

ჩამოვაყალიბოთ შემდეგი შედეგი.

შედეგი 1. *თუ $f \in \mathcal{L}^\infty[-\pi,\pi]$, მაშინ $|S_n(f,x)| \le \left(\frac{4}{\pi^2}\log n + C\right)\|f\|_\infty$.*

მომდევნო თეორემა არის უფრო რთული. მის დამტკიცებაში ჩვენ დაგვჭირდება დირიხლეს გულის ის ფორმა, რომელიც მნიშვნელოვან როლს თამაშობს კარლესონის თეორემაში.

თეორემა 6. *(ჰარდი) თუ $f \in \mathcal{L}^1[-\pi,\pi]$, მაშინ f ფუნქციის ყოველ x ლებეგის წერტილში*

$$\lim_{n\to\infty}\left[S_n(f,x)/(\log n)\right] = 0.$$

გარდა ამისა, თუ f უწყვეტია I ღია ინტერვალზე, მაშინ კრებადობა თანაბარია ყოველ ჩაკეტილ $J \subset I$ ინტერვალზე.

დამტკიცება. დირიხლეს გული შეიძლება ჩაიწეროს როგორც

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{\sin t/2} = 2\frac{\sin nt}{t} + \cos nt + \left(\frac{1}{\tan t/2} - \frac{2}{t}\right)\sin nt.$$

უკანასკნელი ორი წევრი თანაბრად შემოსაზღვრულია n-ისა და t-ს მიმართ. აქედან გამომდინარე

$$D_n(t) = 2\frac{\sin nt}{t} + \varphi_n(t), \quad |t| < \pi.$$

ამასთანავე, არსებობს აბსოლუტური მუდმივა $0 < C < +\infty$ ისეთი, რომ $\|\varphi_n\|_\infty \le C$. ეს გამოსახულება თამაშობს გარკვეულ როლს კარლესონის თეორემაში.

ახლა, გვაქვს

$$\left|S_n(f,x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f(x-t)\frac{\sin nt}{t}dt\right| \le c\int_{-\pi}^\pi |f(t)|dt$$

ასევე, ყოველი f-თვის $\mathcal{L}^1[-\pi,\pi]$-ში

$$|S_n(f,x)| \le c\|f\|_1 + \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\pi}^\pi f(x-t)\frac{\sin nt}{t}dt\right|.$$

$\sin t/t$ ფუნქციიდან ინტეგრალი არის თანაბრად შემოსაზღვრული, საიდანაც გამომდინარეობს

$$|S_n(f,x)| \leq C + \frac{1}{\pi}\left|\int_0^\pi \{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\}\frac{\sin nt}{t}dt\right|.$$

$\varphi_x(t)$-თი აღვნიშნოთ $f(x+t)+f(x-t)-2f(x)$ ფუნქცია. თუ x არის f-ის ლებეგის წერტილი, მაშინ $|\varphi_x(t)|$-დან $\Phi(t)$ პირველადი აკმაყოფილებს $\Phi(t)=o(t)$, როცა $t\to 0$. ამ აღნიშვნებით გვაქვს

$$\begin{aligned}|S_n(f,x)| &\leq C + \frac{n}{\pi}\int_0^{1/n}|\varphi_x(t)|\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{\pi} t^{-1}|\varphi_x(t)|\,dt\\ &= C + \frac{n}{\pi}\Phi\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{\pi}\Phi(t)t^{-1}\Big|_{1/n}^{\pi} + \frac{1}{\pi}\int_{1/n}^{\pi}\Phi(t)t^{-2}dt,\end{aligned}$$

საიდანაც გამომდინარეობს

$$S_n(f,x)/\log n \to 0$$

ვინაიდან, x არის f-ის ლებეგის წერტილი, გვაქვს $\Phi(t)=o(t)$.

ეს შედეგი საუკეთესოა შესაძლო შედეგებს შორის შემდეგი მიზეზიდან გამომდინარე: ყოველი (λ_n) მიმდევრობისთვის რომლისთვისაც $\lambda_n^{-1}\log n \to +\infty$, არსებობს უწყვეტი ფუნქცია f ისეთი, რომ $|S_n(f,x)| > \lambda_n$ უსასრულო რაოდენობა n ნატურალური რიცხვისთვის.

ტრიგონომეტრიული სისტემის ზოგიერთი თვისება გამომდინარეობს იქედან, რომ ის არის ფუნქციათა ორთონორმული სისტემა. მაგალითად, მენშოვმა და რადემახერმა დაამტკიცეს, რომ ორთონორმული ფუნქციებისგან შემდგარი მწკვრივი $\sum_j c_j\varphi_j$ თითქმის ყველგან კრებადია თუ $\sum_j |c_j \log j|^2 < +\infty$. ასევე, ეს არის ზოგად ორთონორმულ სისტემებთან დაკავშირებით გაუძლიერებადი შედეგი. კერძოდ, მენშოვმა 1923 წელს დაამტკიცა, რომ არსებობს მწკვრივი $\sum_j c_j\varphi_j$ რომელიც თითქმის ყველგან განშლადია და ისეთი, რომ $\sum_j |c_j|^2 < +\infty$. აქედან გამომდინარე კარლესონის თეორემა არის ტრიგონომეტრიული სისტემის თვისება, რომელიც დამოკიდებულია ამ სისტემის ბუნებრივ დალაგებაზე.

მარტივად მტკიცდება მენშოვის და რადემახერის დებულება. ეს არის ზოგადი შედეგი, რომელიც ადგენს $S_n(f,x)$-ის რიგს და კონკრეტული მწკვრივის კრებადობას.

თეორემა 7. *დავუშვათ, რომ (λ_n) არის დადებითი ნამდვილი რიცხვების ზრდადი მიმდევრობა ისეთი, რომ ყოველი $g\in\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ ფუნქციისთვის*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n(g,x)}{\lambda_{n+1}} = 0.$$

თუ $f\in\mathcal{L}^1[-\pi,\pi]$ აკმაყოფილებს $\sum_j \left|\widehat{f}(j)\lambda_{|j|}\right|^2 < +\infty$, მაშინ

$$f(x) = \lim_n S_n(f,x),$$

თ. ყ.

დამტკიცება. რისი-ფიშერის თეორემის თანახმად არსებობს ფუნქცია $g \in \mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$, ისეთი, რომ $\widehat{g}(j) = \widehat{f}(j)\lambda_{|j|}$. ფურიეს კოეფიციენტებს თუ შევადარებთ მივიღებთ, რომ

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_{k+1}} \right) S_k(g,x) + \frac{S_n(g,x)}{\lambda_{n+1}}.$$

$\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$ ფუნქციებთან დაკავშირებით ჩვენი ჰიპოთეზის თანახმად, რომელიღაც მწკრივისთვის გვაქვს

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k} - \frac{1}{\lambda_{k+1}} \right) S_k(g,x) = \sum_{k=1}^{\infty} h_k(x).$$

მაგრამ $\mathcal{L}^2[-\pi,\pi]$-ის მწკვრივებისთვის, გვაქვს $\sum_k \|h_k\|_2 < +\infty$. აქედან გამომდინარე მწკვრივი თითქმის ყველგან კრებადია.

2.4 ბანახის უწყვეტობის პრინციპი

თეორემა (7)-ში მოცემული ჰიპოთეზა იმის შესახებ, რომ $\lim_n S_n(f,x)/\lambda_{n+1} \to 0$, თითქმის ყველგან შეიძლება ჩანაცვლდეს $\sup_n |S_n(f,x)/\lambda_{n+1}| < +\infty$ გამოსახულებით. ეს არის ბანახის მიერ ჩამოყალიბებული ზოგადი ფაქტი. რომელსაც ფურიეს მწკვრივის თითქმის ყველგან კრებადობის საკითხი დაჰყავს მაქსიმალური ოპერატორის

$$\sup_n |S_n(f,x)|\,.$$

წერტილოვნად შემოსაზღვრულობამდე.

ამის დასამტკიცებლად ჩვენ გვჭირდება გარკვეული ცოდნა ზომად ფუნქციათა სივრცის შესახებ $\mathcal{L}^0[-\pi,\pi]$. ეს არის მეტრიკული სივრცე

$$d(f,g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f-g|}{1+|f-g|} d\,\mathrm{m}.$$

მეტრიკით.

ეს არის სრული მეტრიკული ვექტორული სივრცე. მიმდევრობა (f_n) კრებადია 0-კენ მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როცა ის ზომით არის კრებადი 0-კენ. სხვაგვარად: ყოველი $\varepsilon > 0$-თვის გვაქვს $\lim_n \mathfrak{m}\{|f_n| > \varepsilon\} = 0$. ახლა განვიხილოთ (T_n) წრფივი ოპერატორების

$$T_n : \mathcal{L}^p[-\pi,\pi] \to \mathcal{L}^0[-\pi,\pi].$$

მიმდევრობა.

ჩვენ ვუშვებთ, რომ ყოველი T_n ზომით არის უწყვეტი, აქედან გამომდინარე ყოველი (f_k) მიმდევრობისთვის, რომლისთვისაც $\|f_k\|_p \to 0$, და ყოველი $\varepsilon > 0$-თვის გვაქვს

$\mathfrak{m}\{|T(f_k)| > \varepsilon\} \to 0$, (და ეს ჭეშმარიტია ყოველი $T = T_n$-თვის). დავაკვირდეთ, რომ თუ $T_n f(x)$ კრებადია თ. ყ., მაშინ მაქსიმალური ოპერატორი $T^* f(x) = \sup_n |T_n f(x)|$ არის შემოსაზღვრული თ. ყ.

ბანახის პრინციპი გარკვეულწილად არის თანაბრად შემოსაზღვულობის პრინციპი: ოპერატორების მიმდევრობის ზომით უწყვეტობიდან და მაქსიმალური ოპერატორის თითქმის ყველგან სასრულობიდან გამომდინარეობს მაქსიმალური ოპერატორის ზომით უწყვეტობა 0-ში.

თეორემა 8. *(ბანახის უწყვეტობის პრინციპი) დავუშვათ, ყოველი $f \in \mathcal{L}^p[-\pi,\pi]$ ფუნქციისთვის $T^* f(x) < +\infty$ თითქმის ყველგან $[-\pi,\pi]$-ზე, მაშინ არსებობს კლებადი ფუნქცია $C(\alpha)$ ($\alpha > 0$) ისეთი, რომ $\lim_{\alpha\to+\infty} C(\alpha) = 0$ და*

$$\mathfrak{m}\{T^* f(x) > \alpha\|f\|_p\} \leq C(\alpha),$$

ყოველი $f \in \mathcal{L}^p[-\pi,\pi]$-თვის.

დამტკიცება. დავაფიქსიროთ დადებითი ნამდვილი $\varepsilon > 0$ რიცხვი. ვთქვათ, ყოველი ნატურალური n რიცხვისთვის F_n იყოს $f \in \mathcal{L}^p[-\pi,\pi]$ ფუნქციების სიმრავლე ისეთი, რომ $\mathfrak{m}\{T^* f(x) > n\} \leq \varepsilon$. F_n სიმრავლე არის ჩაკეტილი $\mathcal{L}^p[-\pi,\pi]$-ზე. ამის დასამტკიცებლად დავუშვათ $f \notin F_n$, მაშინ

$$\mathfrak{m}\{T^* f(x) > n\} > \varepsilon.$$

ამიტომ არსებობს N ისეთი, რომ

$$\mathfrak{m}\left\{\sup_{1\leq k\leq N} T_k f(x) > n\right\} > \varepsilon.$$

აქედან გამომდინარე, არსებობს $\delta > 0$ ისეთი, რომ

$$\mathrm{m}\left\{\sup_{1\leq k\leq N} T_k f(x) > n+\delta\right\} > \varepsilon+\delta.$$

T_k ოპერატორების ზომით უწყვეტობიდან გამომდინარე, არსებობს $\delta' > 0$ ისეთი, რომ ყოველი g ფუნქციისთვის, რომლისთვისაც $\|f-g\|_p < \delta'$, გვაქვს

$$\mathfrak{m}\{|T_k(f-g)(x)| > \delta\} < \delta/2^k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

დავუშვათ Z არის $\{|T_k(f-g)(x)| > \delta\}$ სიმრავლეთა გაერთიანება. მაშინ $\mathfrak{m}(Z) < \delta$. ასევე, გვაქვს

$$\{T^* g(x) > n\} \cup Z \supset \left\{\sup_{1\leq k\leq N} T_k f(x) > n+\delta\right\}.$$

აქედან გამომდინარე,

$$\mathrm{m}\{T^* g(x) > n\} > \varepsilon.$$

ანუ, $\mathcal{L}^p[-\pi,\pi]\backslash F_n$ სიმრავლე არის ღია. ახლა, ჩვენი ჰიპოთეზა T^*f-ის შემოსაზღვრულობასთან დაკავშირებით გამომდინარეობს შემდეგი ტოლობიდან

$$\mathcal{L}^p[-\pi,\pi]=\bigcup_n F_n.$$

ბერის კატეგორიათა თეორემის თანახმად არსებობს $n\in\mathbf{N}$ ისეთი, რომ F_n-ს აქვს არაცარიელი ინტერიორი. ანუ, არსებობს $f_0\in F_n$ და $\delta>0$, ისეთი რომ $f=f_0+\delta g$, როცა $\|g\|_p=1$. საიდანაც

$$\mathfrak{m}\left\{T^*\left(f_0+\delta g\right)>n\right\}\le\varepsilon.$$

მაშინ

$$\mathfrak{m}\left\{T^*g>2n/\delta\right\}\le\mathfrak{m}\left\{T^*\left(f_0+\delta g\right)>n\right\}+\mathfrak{m}\left\{T^*\left(f_0-\delta g\right)>n\right\}\le 2\varepsilon.$$

აქედან გამომდინარე, ყოველი $g\in\mathcal{L}^p[-\pi,\pi]$-თვის

$$\mathrm{m}\left\{T^*g>(2n/\delta)\|g\|_p\right\}\le 2\varepsilon.$$

ამიტომ თუ დავუშვებთ, რომ

$$C(\alpha)=\sup\mathfrak{m}\left\{T^*g>\alpha\|g\|_p\right\},$$

$C(\alpha)$ ფუნქცია აკმაყოფილებს პირობას $\lim_{\alpha\to+\infty}C(\alpha)=0$. ■

ამ პრინციპის დამტკიცება დასრულებულია იმის გათვალისწინებით, რომ (T_n)-ებთან დაკავშირებით იგივე ჰიპოთეზით, იმ $f\in\mathcal{L}^p[-\pi,\pi]$ ფუნქციათა სიმრავლე, რომელთათვისაც $limT_nf(x)$ არსებობს თითქმის ყველგან ჩაკეტილია $\mathcal{L}^p[-\pi,\pi]$-ში. ამის დასამტკიცებლად განვსაზღვროთ ოპერატორი

$$\Omega(f)(x)=\limsup_{n,m}\left|T_nf(x)-T_mf(x)\right|.$$

ცხადია, რომ $\Omega f\le 2T^*f$. აქედან გამომდინარე,

$$\mathfrak{m}\left\{\Omega f(x)>\alpha\|f\|_p\right\}\le C(\alpha/2).$$

ყოველი φ ფუნქციისთვის, რომლისთვისაც $\lim_n T_n\varphi(x)$ არსებობს თითქმის ყველგან, გვაქვს $\Omega\varphi=0$ და $\Omega(f-\varphi)=\Omega f$. აქედან გვექნება

$$\mathfrak{m}\left\{\Omega f(x)>\alpha\|f-\varphi\|_p\right\}\le C(\alpha/2).$$

ახლა, დავუშვათ f არის φ ფუნქციათა სიმრავლის ჩაკეტვიდან. ავიღოთ $\alpha=1/\varepsilon$ და $\|f-\varphi\|_p<\varepsilon^2$. მივიღებთ

$$\mathfrak{m}\{\Omega f(x)>\varepsilon\}\le C(1/2\varepsilon).$$

აქედან მარტივად გამომდინარეობს, რომ $\mathfrak{m}\{\Omega f(x)>0\}=0$.

2.5 შეჯამებადობა

როგორც აქამდე აღინიშნა, დიუბუა რეიმონდმა ააგო უწყვეტი ფუნქცია რომლის ფურიეს მწკვრივი განშლადია რომელიღაც წერტილში. 19 წლის ასაკში ფიშერმა დაამტკიცა, რომ ამის გათვალისწინებით ჩვენ შეგვიძლია აღვადგინოთ უწყვეტი ფუნქცია მისი ფურიეს მწკვრივიდან.

აღვნიშნოთ, რომ თუ მიმდევრობა კრებადია, მაშინ ამ მიმდევრობის წევრებისგან შემდგარი მწკვრივის კერძო ჯამების საშუალოც კრებადია იგივე ზღვრისკენ. ფიშერმა განიხილა კერძო ჯამების საშუალო მნიშვნელობები

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} S_n(f,x).$$

ჩვენ გვაქვს ამ საშუალოების ინტეგრალური წარმოდგენა

$$\sigma_n(f,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_n(x-t)f(t)dt$$

სადაც F_n არის ფეიერის გული:

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} D_j(t) = \sum_{j=-n}^{j=n}\left(1-\frac{|j|}{n+1}\right)e^{ijt}.$$

არსებობს F_n-ების ტოლფასი წარმოდგენა. დირიხლეს გულის მნიშვნელობების გამოთვლისას ჩვენ გვიწევს $\sin(n+1/2)t$-ის შემცველი გამოსახულების აჯამვა. ეს უკანასკნელი კი წარმოადგენს შემდეგი გამოსახულების წარმოსახვით ნაწილს

$$\sum_{j=0}^{n} e^{i(2j+1)t/2} = e^{-it/2}\sum_{j=0}^{n} e^{ijt} = \frac{1}{2i}\frac{e^{i(n+1)t}-1}{\sin(t/2)},$$

საიდანაც

$$\sum_{j=0}^{n}\sin\frac{2j+1}{2}t = \frac{1-\cos(n+1)t}{2\sin(t/2)} = \frac{\sin^2(n+1)^t/2}{\sin(t/2)}.$$

აქედან გამომდინარე, გვაქვს

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin(n+1)t/2}{\sin(t/2)}\right)^2.$$

მაშასადამე, F_n არის დადებითი ფუნქცია, $\|F_n\|_1 = 1$, და ყოველი $\delta > 0$ გვაქვს $\lim_n F_n(t) = 0$, თანაბრად $\delta < |t| \leq \pi$.

უფრო ზოგადად, ჩვენ განვსაზღვრავთ შეჯამებადობის გულს როგორც პერიოდული ფუნქციების (k_n) მიმდევრობას ისეთს რომ:

$$(i)\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} k_n(t)dt = 1,$$

$$(ii)\ \|k_n\|_1 \le C,$$

(iii) ყოველი $\delta > 0$-თვის

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta<|t|\le\pi} |k_n(t)|\, dt = 0.$$

მომდევნო თეორემა წარმოადგენს ფეიერის თეორემას, რომელიც მართებულია ყოველი შეჯამებადობის გულისთვის.

თეორემა 9. *ვთქვათ, (k_n) არის შეჯამებადობის გული. თუ $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ ფუნქცია არის უწყვეტი და 2π პერიოდული, მაშინ $k_n * f(x)$ თანაბრად კრებადია $f(x)$-კენ. უფრო მეტიც, ყოველი $1 \le p < +\infty$ და $f \in \mathcal{L}^p[-\pi,\pi]$ ფუნქციისთვის გვაქვს*

$$\lim_{n\to+\infty} \|k_n * f - f\|_p = 0$$

დამტკიცება. ვთქვათ, f უწყვეტი და 2π-პერიოდულია. შეჯამებადობის გულის (i) თვისების გათვალისწინებით გვექნება

$$k_n * f(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - f(x))k_n(t)dt.$$

მოცემული $\varepsilon > 0$-თვის ჩვენ დავშლით ინტეგრალს ორ ნაწილად, ერთი $\{|t| < \delta\}$ სიმრავლეზე და მეორე $\{\delta < |t| < \pi\}$ სიმრავლეზე. f ფუნქციის უწყვეტობიდან და შეჯამებადობის გულის (ii) თვისებიდან გამომდინარე, პირველი ინტეგრალი არის საკმარისად მცირე; ხოლო (iii) თვისებიდან გამომდინარე გვექნება რომ მეორე ინტეგრალიც ასევე, საკმარისად მცირეა.

დავაკვირდეთ, რომ ანალოგიურად მტკიცდება კრებადობის მართებულობა ზომადი და შემოსაზღვრული f ფუნქციისთვის, f-ის უწყვეტობის წერტილებში.

ვინაიდან (F_n) არის შეჯამებადობის გული, $F_n * f$ წარმოადგენს ტრიგონომეტრიულ პოლინომს ყოველი f-თვის, ამიტომ ეს პოლინომები მკვრივია $\mathcal{C}(\mathbf{T})$-ში.

ახლა, ყოველი $f \in \mathcal{L}^p[-\pi,\pi]$-თვის $t \mapsto G(t) = \|f(\cdot + t) - f(\cdot)\|_p$ არის უწყვეტი და 2π-პერიოდული ფუნქცია. აქედან გვექნება

$$\|k_n * f - f\|_p \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f(\cdot - t) - f(\cdot)\|_p k_n(t)dt = k_n * G(0).$$

ნახვევის თეორემის პირველი ნაწილის გამოყენებით გვექნება, რომ $\lim_n k_n * G(0) \to 0$.

■

მაშასადამე, თუ f არის უწყვეტი და 2π პერიოდული, მაშინ $\sigma_n(f,x)$ თანაბრად კრებადია f-კენ, და კრებადია f-კენ $\mathcal{L}^p[-\pi,\pi]$-ში თუ $f \in \mathcal{L}^p[-\pi,\pi]$. კიდევ ერთი მნიშვნელოვანი

მაგალითი არის პუასონის გული. ეს უკანასკნელი ჩნდება მაშინ, როცა ჩვენ განვიხილავთ f ფუნქციის ფურიეს მწკვრივს, როგორც კომპლექსური ფუნქციის სასაზღვრო მნიშვნელობას ერთეულოვან ღია დისკზე. თუ $f \in \mathcal{L}^1[-\pi,\pi]$, მაშინ შემდეგი მწკვრივი

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \hat{f}(j) z^j + \sum_{j=1}^{+\infty} \hat{f}(-j) \bar{z}^j$$

კრებადია ერთეულოვან ღია დისკზე და განსაზღვრავს კომპლექსურ ჰარმონიულ $u(z)$ ფუნქციას. მაშინ

$$u\left(re^{i\theta}\right) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(j) r^{|j|} e^{ij\theta} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P_r(\theta - t) f(t) dt,$$

სადაც პუასონის გული $P_r(\theta)$ განისაზღვრება, როგორც

$$P_r(\theta) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} r^{|j|} e^{ij\theta} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos\theta + r^2}.$$

მარტივი შესამოწმებელია რომ $P_r(\theta)$ არის შეჯამებადობის გული. მაშინ გვაქვს

წინადადება 3. *თუ* $f \in \mathcal{L}^p[-\pi,\pi], 1 \le p < +\infty$ *ან* $p = +\infty$ *და* f *არის უწყვეტი (*$f(\pi) = f(-\pi)$*), მაშინ*

$$\lim_{r \to 1^-} \|P_r * f - f\|_p = 0$$

.

ახლა განვიხილავთ შემთხვევას, როცა $f \in \mathcal{L}^1[-\pi,\pi]$ და გვაინტერესებს $F_n * f(x)$ ან $P_r * f(x)$ ნახვევების $f(x)$-კენ თითქმის ყველგან კრებადობის საკითხი. აშკარაა, რომ არსებობს $F_{n_k} * f$ და $P_{r_k} * f$ ქვემიმდევრობები, რომლებიც თ. ყ. კრებადია f ფუნქციისკენ. $u\left(re^{i\theta}\right) = P_r * f(\theta)$ არის ჰარმონიული ფუნქცია ერთეულოვან დისკზე. რაც ჩვენ გვაინტერესებს, არის თეორემა ჰარმონიული ფუნქციის რადიალურ კრებადობასთან დაკავშირებით $\lim_{r\to 1^-} u\left(re^{i\theta}\right)$. პირველი ამ ტიპის თეორემა, რომელიც ჩამოყალიბდა 1905 წელს ეკუთვნის ფატუს: ღია ერთეულოვან დისკზე შემოსაზღვულ და ანალიზურ ფუნქციას, საზღვრის თითქმის ყველა წერტილში გააჩნია რადიალური ზღვარი. ჩვენ ვამჯობინებთ დავამტკიცოთ დიფერენცირების შესახებ თეორემა, რომელიც შეიძლება გავრცელდეს $\sigma_n(f,x)$ საშუალოებზე.

თეორემა 10. *(ფატუ) ვთქვათ,* $f \in \mathcal{L}^1[-\pi,\pi]$*. თითქმის ყველა* $x \in [-\pi,\pi]$ *წერტილისთვის, გვაქვს*

$$\lim_{r \to 1^-} P_r * f(x) = f(x), \quad \lim_{n} \sigma_n(f,x) = f(x).$$

დამტკიცება. დამტკიცების მთავარი ნაწილია ვაჩვენოთ

$$P^*f(x) = \sup_{0<r<1} |P_r * f(x)|, \quad F^*f(x) = \sup_n |F_n * f(x)|$$

ოპერატორების შემოსაზღვრულობა. უკანასკნელი გამომდინარეობს ჰარდი-ლიტლვუდის მაქსიმალურ ფუნქციასთან დაკავშირებით არსებული უტოლობიდან. განვსაზღვროთ $f^\circ : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ როგორც 0, როცა $|x| > 2\pi$ და იყოს f-ის პერიოდული გაგრძელება, როცა $|x| < 2\pi$. ასევე, პუასონის გულისთვის ვიგულისხმოთ $P_r^\circ : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ $P_r^\circ(\theta) = 0$, როცა $|\theta| > \pi$, და იყოს $P_r(\theta)$, როცა $|\theta| < \pi$. მაშინ შეგვიძლია დავწეროთ

$$P_r * f(x) = P_r^\circ * f^\circ(x), \quad |x| < \pi.$$

ანალოგიურად, შეგვიძლია განვსაზღვროთ F_n° ფუნქცია ისე, რომ

$$\sigma_n(f, x) = F_n * f(x) = F_n^\circ * f^\circ(x), \quad |x| < \pi.$$

ვინაიდან P_r° არის რადიალური ფუნქცია და კლებადი $x > 0$-თვის და მისი ინტეგრალი $\mathbf{R}$-ზე არის 1-ის ტოლი, გვექნება $|P_r^\circ * f^\circ(x)| \leq \mathcal{M}f^\circ(x)$. ამიტომ გვაქვს $P^*f(x) \leq \mathcal{M}f^\circ(x)$ ყოველი $|x| < \pi$-თვის.

ფეიერის გული არ არის კლებადი, მაგრამ $\sin(t/2) > t/\pi$, როცა $0 < t < \pi$. აქედან გამომდინარე

$$F_n^\circ(t) \leq \begin{cases} \frac{1}{n+1}\left(\frac{(n+1)t/2}{t/4}\right)^2 \leq 16(n+1), & \text{თუ } |t| \leq \frac{1}{n+1}, \\ \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{t/4}\right)^2 = \frac{16}{n+1}\frac{1}{t^2}, & \text{თუ } \frac{1}{n+1} < |t| < \pi. \end{cases}$$

მაშასადამე, F_n შემოსაზღვრულია რადიალური ფუნქციით, რომელიც კლებადია $t > 0$-თვის და აქვს თანაბრად შემოსაზღვრული ინტეგრალები. აქედან გამომდინარეობს

$$F^*f(x) \leq C\mathcal{M}f(x).$$

ახლა, მტკიცება თითქმის ყველგან წერტილოვან კრებადობასთან დაკავშირებით პრაქტიკულად იგივეა, რაც დიფერენცირებადობის თეორემისას.

ლიტერატურა

[1] Juan Arias de Reyna, Pointwise convergence of Fourier series, Springer, 2002, 3-24.

[2] Zygmund A., Trigonometric series, i, ii, Cambridge mathematical library, 2002.