ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი

მათემატიკის სადოქტორო პროგრამა

სამეცნიერო კვლევითი პროექტი 2

ირაკლი სიხარულიძე

ფსევდოანალიზურ დიფერენციალურ ფორმათა კონა

ხელმძღვანელი - გია გიორგაძე, ფიზიკა-მათემატიკურ მეცნიერებათა დოქტორი, ასოცირებული პროფესორი, ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი

ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,

მათემატიკის დეპარტამენტი

2024 წელი, თბილისი

სარჩევი

ანოტაცია

მოიყვანება ხერხი განზოგადოებისა ბერს-ვეკუას თეორიაში განხილული პსევდოანალიზურობის ცნებისა კომპლექსურ მრავალსახეობაზე განსაზღვრულ დიფერენციალურ ფორმებზე, განისაზღვრება კონა, რომლის კვეთებიც ღია სიმრავლეზე არიან დიფერენციალური ფორმები, რომელთა კომპონენტ-ფუნქციები ნებისმიერი ლოკალური კოორდინატული სისტემით ინდუცირებელი მატრივიალიზებელი კვეთების მიმართ აკმაყოფილებს თვითოეული არგუმენტის მიმართ კომპლექსურად წრფივ კარლემან-ბერს-ვეკუას განტოლებას; ასეთი კონა შეიძლება განისაზღვროს როგორც ბირთვ-კონა სათანადოდ განსაზღვრული კონათა ჰომომორფიზმისა, რომლისთვისაც, გარკვეული პირობების შესრულებისას, სრულდება პუანკარეს ლემის ანალოგი და, იმავე პირობების შესრულებისას, მიმდევრობა ასეთ კონათა ჰომომორფიზმთა ადგენს კომპლექსს, რაც იძლევა შესაძლებლობას დამტკიცდეს დოლბოს თეორემის ანალოგი ამ კონათათვის.

Abstract

A way to extend the notion of pseudoanalyticity of the Bers-Vekua theory to differential forms defined on a complex manifold is presented, defining a sheaf whose sections over an open subset are differential forms whose component functions with respect to any trivializing sections induced by a local coordinate system satisfy in each argument the complex-linear Carleman-Bers-Vekua equation; such a sheaf may be defined as the kernel sheaf of an appropriate sheaf homomorphism, for which, under certain conditions an analogue of the Poincaré lemma holds and, under the same conditions, the sequence of such sheaf homomorphisms forms a complex, all of which allows one to prove an analogue of the Dolbeault's theorem for these sheaves.

შესავალი

ორი პირველი რიგის წრფივი დიფერენციალური განტოლებისაგან შემდგარი სისტემა სიბრტყის ღია ქვესიმრავლეზე კოეფიციანტთა საკმაოდ ვრცელი კლასისთვის შეიძლება ჩაწერილ იქნას ვირტინგერის წარმოებულის $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ მეშვეობით კომპლექსური სახით

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = a \cdot f + b \cdot \overline{f},$$

რომელიც წარმოადგენს კოში-რიმანის განტოლებათა სისტემის განზოგადოებას და იწოდება ბერს-ვეკუას განტოლებად; ეს განტოლება და მის ამონახსნთა სივრცე სისტემატურად შეისწავლებოდა ი. ვეკუასა და ლ. ბერსის მიერ; მათ აჩვენეს რომ არაერთი თეორემა ჰოლომორფულ ფუნქციათა თეორიისა განზოგადოებადია ამ განტოლების ამონახსნთა სივრცეზე; მომდევნო წლებში ბერს-ვეკუას თეორია განზოგადდა ორი მიმართულებით: ერთის მხრივ, ამ ტიპის განტოლებები და მათი ამონახსნები შეისწავლებოდა მრავალი კომპლექსური ცვლადის ფუნქციებისათვის, მეორეს მხრივ კი შეისწავლებოდა ამოხსნადობა ამ ტიპის განტოლებათა მატრიცული კოეფიციენტებით ვექტორულმნიშვნელობიან ფუნქციათათვის. ორივე მიდგომა ლოკალურია, ერთ-ერთ წინაღობას გადასვლისთვის გლობალურ მიდგომაზე წარმოადგენს კვაზიწრფივობა და, ზოგადად, არაწრფივობა ოპერატორისა

$$\bar{\partial} - A - B \cdot \mathcal{C},$$

სადაც A და B სათანადო ტიპის ობიექტებია, ხოლო $\mathcal{C}$ კი - კომპლექსური შეუღლების ოპერატორია; ამ ოპერატორის ბირთვი არ არის წრფივი სივრცე $\mathbb{C}$-ს ზედ; შეისწავლება ასევე შემთხვევები, როდესაც ერთ-ერთი კოეფიციენტთაგან 0-ია. აქ განიხილება დოლბოს, ან კოში-რიმანის, ოპერატორის განზოგადოება $B = 0$-ით, რომელიც მოქმედებს კომპლექსურ მრავალსახეობაზე განსაზღვრულ დიფერენციალურ ფორმებზე.

განზოგადოებული დოლბოს ოპერატორი

X კომპლექსური მრავალსახეობის კომპლექსური განზომილებით $n \in \mathbb{N}$, $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, ღია ქვესიმრავლეზე $U \subseteq X$ განსაზღვრული $(0,1)$-ტიპის დიფერენციალური ფორმის $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(U)$ მიმართ განისაზღვრება ასახვა, ნებისმიერი $p, q \in \mathbb{N}$-ისთვის:

$$\bar{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q}(U) \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}(U), \qquad \omega \mapsto \bar{\partial}_\alpha(\omega) \equiv \bar{\partial}_\alpha \omega := \bar{\partial}\omega - \alpha \wedge \omega;$$

ის $\mathcal{O}_X(U)$-მოდულთა ჰომომორფიზმია. $\omega \in \mathcal{A}_X^{p,q}(U), \eta \in \mathcal{A}_X^{r,s}(U)$-ისთვის

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_\alpha(\omega \wedge \eta) &= \bar{\partial}(\omega \wedge \eta) - \alpha \wedge \omega \wedge \eta \\
&= \bar{\partial}(\omega) \wedge \eta + (-1)^{p+q}\omega \wedge \bar{\partial}(\eta) - \frac{1}{2}\alpha \wedge \omega \wedge \eta - \frac{1}{2}\alpha \wedge \omega \wedge \eta \\
&= \left(\bar{\partial}(\omega) - \frac{1}{2}\alpha \wedge \omega\right) \wedge \eta + (-1)^{p+q}\omega \wedge \left(\bar{\partial}(\eta) - \frac{1}{2}\alpha \wedge \eta\right) \\
&= \bar{\partial}_{\frac{1}{2}\alpha}(\omega) \wedge \eta + (-1)^{p+q}\omega \wedge \bar{\partial}_{\frac{1}{2}\alpha}(\eta).
\end{aligned}$$

ლოკალური კოორდინატული სისტემის მიმართ $V \subseteq X$-ზე, $U \cap V \neq \emptyset$, კოორდინატული ფუნქციებით $z_1, \dots, z_n : V \to \mathbb{C}$, რომლითაც ინდუცირებული მატრივიალიზებელი კვეთების მიმართ ω და α წარმოიდგინება

$$\omega = \sum_{|I|=p,|J|=q} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J, \qquad \alpha = \sum_{j=1}^{n} a_j d\bar{z}_j,$$

$\bar{\partial}_\alpha$ მოქმედებს შემდეგნაირად

$$\begin{aligned}
\bar{\partial}_\alpha(\omega) = \bar{\partial}_\alpha\left(\sum_{|I|=p,|J|=q} f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J\right) &= \sum_{|I|=p,|J|=q} \bar{\partial}_\alpha\left(f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J\right) \\
&= \sum_{|I|=p,|J|=q} \left(\bar{\partial}\left(f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J\right) - \alpha \wedge f_{IJ} dz_I \wedge d\bar{z}_J\right) \\
&= \sum_{|I|=p,|J|=q} \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J\right) - f_{IJ}\left(\sum_{j=1}^{n} a_j d\bar{z}_j\right) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J\right) \\
&= \sum_{|I|=p,|J|=q} \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J\right) - \sum_{j=1}^{n}\left(a_j f_{IJ} d\bar{z}_j \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J\right)\right) \\
&= \sum_{|I|=p,|J|=q} \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_k} d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J\right) - \sum_{k=1}^{n}\left(a_k f_{IJ} d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J\right)\right) \\
&= \sum_{|I|=p,|J|=q} \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_k} - a_k f_{IJ}\right) d\bar{z}_k \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J\right)\right) \\
&= \sum_{|I|=p,|J|=q} \left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \bar{z}_k} - a_k f_{IJ}\right) d\bar{z}_k\right) \wedge dz_I \wedge d\bar{z}_J.
\end{aligned}$$

განზოგადოებული დოლბოს ლემა

$\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \mathbb{R}_+^n$-რადიუსის პოლიდისკის $B_\epsilon(0) := \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \mid |z_1| < \epsilon_1, \dots, |z_n| < \epsilon_n\}$ ცენტრით $0 \in \mathbb{C}^n$ ტოპოლოგიური ჩაკეტა აღვნიშნოთ $\overline{B_\epsilon(0)}$-ით.

ლემა. პოლიდისკის ჩაკეტვის ღია მიდამოზე $U, \overline{B_\epsilon(0)} \subseteq U \subseteq \mathbb{C}^n$, განსაზღვრული ფორმებისათვის $\alpha \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{0,1}(U), \omega \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{p,q}(U)$ დოლბოს ოპერატორის მიმართ ჩაკეტილი α-ით, $\overline{\partial}\alpha = 0$, და $\overline{\partial}_\alpha$-ის მიმართ ჩაკეტილი ω-ით, $\overline{\partial}_\alpha \omega = 0$, არსებობს ფორმა $\eta \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{p,q-1}\big(B_\epsilon(0)\big)$ ისეთი, რომ

$$\overline{\partial}_\alpha \eta = \omega|_{B_\epsilon(0)} \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{p,q}\big(B_\epsilon(0)\big).$$

დამტკიცება. ტოლობიდან:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_\alpha(\omega) = \overline{\partial}_\alpha\left(\sum_{|I|=p,|J|=q} f_{IJ}\, dz_I \wedge d\overline{z}_J\right) &= \sum_{|I|=p,|J|=q}\left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \overline{z}_k} - a_k f_{IJ}\right) d\overline{z}_k\right) \wedge dz_I \wedge d\overline{z}_J \\
&= \sum_{|I|=p,|J|=q} (-1)^{|I|} dz_I \wedge \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \overline{z}_k} - a_k f_{IJ}\right) d\overline{z}_k\right) \wedge d\overline{z}_J \\
&= \sum_{|I|=p}\left((-1)^{|I|} dz_I \wedge \sum_{|J|=q}\left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f_{IJ}}{\partial \overline{z}_k} - a_k f_{IJ}\right) d\overline{z}_k\right) \wedge d\overline{z}_J\right) \\
&= \sum_{|I|=p}\left((-1)^{|I|} dz_I \wedge \overline{\partial}_\alpha\left(\sum_{|J|=q} f_{IJ}\, d\overline{z}_J\right)\right) \\
&= \sum_{|I|=p}\left(dz_I \wedge \overline{\partial}_\alpha\left(\sum_{|J|=q} (-1)^{|I|} f_{IJ}\, d\overline{z}_J\right)\right).
\end{aligned}$$

გამომდინარეობს, რომ $\sum_{|I|=p,|J|=q} f_{IJ}\, dz_I \wedge d\overline{z}_J$-ის $\overline{\partial}_\alpha$-ჩაკეტილობა და $\overline{\partial}_\alpha$-სიზუსტე ტოლფასია ყოველი $|I| = p$-ისთვის $\sum_{|J|=q} f_{IJ}\, d\overline{z}_J \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{0,q}(U)$-ის, შესაბამისად, $\overline{\partial}_\alpha$-ჩაკეტილობისა და $\overline{\partial}_\alpha$-სიზუსტის; აქედან გამომდინარე, ზოგადობის შეუზღუდავად შეგვძლია დავუშვათ, რომ $\omega \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{0,q}(U)$. დამტკიცება იწარმოება ინდუქციით იმ რიცხვის მიმართ $k \in \mathbb{N}$, რომელზე მაღალი ინდექსის მქონე კოორდინატული ფუნქციის დიფერენციალი $d\overline{z}_l, l > k$ არ შედის განსახილველ ფორმაში; $k < q$ შემთხვევისათვის ფორმა ნულოვანიაა, $\omega = 0 \in \mathcal{A}_{\mathbb{C}^n}^{0,q}(U)$, ამიტომ ზემომოყვანილი

თვისების მქონე ფორმად შეიძლება $\eta = 0 \in \mathcal{A}^{p,q-1}_{\mathbb{C}^n}(B_\epsilon(0))$-ის აღება; დავუშვათ ლემის სამართლიანობა $k \in \mathbb{N}$-ისთვის და განვიხილოთ $k+1$-ის შემთხვევა: $\omega \in \mathcal{A}^{0,q}_{\mathbb{C}^n}(U)$ წარმოდგენადია სახით:

$$\omega = \left(\sum_{\substack{J \subseteq \{1,\dots,k\} \\ |J| = q-1}} f_J d\overline{z}_J \right) \wedge d\overline{z}_{k+1} + \sum_{\substack{K \subseteq \{1,\dots,k\} \\ |K| = q}} g_K d\overline{z}_K \,;$$

შესაბამისად:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_\alpha(\omega) &= \overline{\partial}_\alpha \left(\left(\sum_{\substack{J \subseteq \{1,\dots,k\} \\ |J| = q-1}} f_J d\overline{z}_J \right) \wedge d\overline{z}_{k+1} \right) + \overline{\partial}_\alpha \left(\sum_{\substack{K \subseteq \{1,\dots,k\} \\ |K| = q}} g_K d\overline{z}_K \right) \\
&= \overline{\partial}_\alpha \left(\sum_{\substack{J \subseteq \{1,\dots,k\} \\ |J| = q-1}} f_J d\overline{z}_J \wedge d\overline{z}_{k+1} \right) + \overline{\partial}_\alpha \left(\sum_{\substack{K \subseteq \{1,\dots,k\} \\ |K| = q}} g_K d\overline{z}_K \right) \\
&= \sum_{\substack{J \subseteq \{1,\dots,k\} \\ |J| = q-1}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_J}{\partial \overline{z}_j} - a_j f_J \right) d\overline{z}_j \right) \wedge d\overline{z}_J \wedge d\overline{z}_{k+1} \\
&\quad + \sum_{\substack{K \subseteq \{1,\dots,k\} \\ |K| = q}} \left(\sum_{l=1}^{n} \left(\frac{\partial g_K}{\partial \overline{z}_l} - a_l g_K \right) d\overline{z}_k \right) \wedge d\overline{z}_K,
\end{aligned}$$

პირველი ჯამის შესაკრებები, რომლებიც შეიცავენ $d\overline{z}_j, j \in \{k+2,\dots,n\}$, შეიცავენ ასევე $d\overline{z}_{k+1}$-საც, ხოლო მეორე ჯამისანი კი არა, ამიტომ $\overline{\partial}_\alpha(\omega) = 0$-დან გამომდინარეობს

$$\frac{\partial f_J}{\partial \overline{z}_j} - a_j f_J = 0, \qquad j \in \{k+2,\dots,n\};$$

$\overline{\partial}\alpha = 0$-იდან დოლბოს ლემის ძალით გამომდინარეობს, რომ არსებობს $F: U \to \mathbb{C}$

$$\overline{\partial} F|_{B_\epsilon(0)} = \alpha|_{B_\epsilon(0)},$$

მისი მიშველობით განვსაზღვროთ:

$$\varphi := \exp \circ F: U \to \mathbb{C}\setminus\{0\}, \qquad (z_1,\dots,z_n) \mapsto \varphi = \exp(F(z_1,\dots,z_n)) \equiv e^{F(z_1,\dots,z_n)},$$

რომელიც აკმაყოფილებს

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}_l} = (\exp' \circ F) \cdot \frac{\partial F}{\partial \overline{z}_l} + \left(\frac{\partial \exp}{\partial \overline{w}} \circ F \right) \cdot \frac{\partial \overline{F}}{\partial \overline{z}_l} = (\exp \circ F) \cdot \frac{\partial F}{\partial \overline{z}_l} = \varphi \frac{\partial F}{\partial \overline{z}_l} = a_l \varphi, \qquad l \in \{1,\dots,n\};$$

და ასახვა

$$h_J : U \to \mathbb{C}, \qquad (z_1, \dots, z_n)$$
$$\mapsto h_J(z_1, \dots, z_n)$$
$$:= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{\epsilon_{k+1}}(0)} \frac{f_J(z_1, \dots, z_k, w, z_{k+1}, \dots, z_n)}{\varphi(z_1, \dots, z_k, w, z_{k+1}, \dots, z_n) \cdot (w - z_{k+1})} dw \wedge d\overline{w}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{\epsilon_{k+1}}(0)} \frac{\frac{f_J}{\varphi}(z_1, \dots, z_k, w, z_{k+1}, \dots, z_n)}{(w - z_{k+1})} dw \wedge d\overline{w},$$

სადაც $B_{\epsilon_{k+1}}(0) := \{z \in \mathbb{C} | |z| < \epsilon_{k+1}\}$; $U \cap \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C} | |z_{k+1}| < \epsilon_{k+1}\}$-ზე

$$\frac{\partial h_J}{\partial \overline{z}_{k+1}} = \frac{f_J}{\varphi},$$

$B_\epsilon(0)$-ზე ნებისმიერი $m \in \{2, \dots, n-k\}$-ისთვის,

$$\frac{\partial h_J}{\partial \overline{z}_{k+m}}(z_1, \dots, z_n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{\epsilon_{k+1}}(0)} \frac{1}{(w - z_{k+1})} \cdot \frac{\partial \frac{f_J}{\varphi}}{\partial \overline{z}_{k+m}}(z_1, \dots, z_k, w, z_{k+1}, \dots, z_n) dw \wedge d\overline{w}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{\epsilon_{k+1}}(0)} \frac{1}{(w - z_{k+1})}$$
$$\cdot \left(\frac{\partial f_J}{\partial \overline{z}_{k+m}} \cdot \frac{1}{\varphi} + f_J \cdot \frac{\partial \frac{1}{\varphi}}{\partial \overline{z}_{k+m}} \right) (z_1, \dots, z_k, w, z_{k+1}, \dots, z_n) dw \wedge d\overline{w}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{\epsilon_{k+1}}(0)} \frac{1}{(w - z_{k+1})}$$
$$\cdot \left(\frac{\partial f_J}{\partial \overline{z}_{k+m}} \cdot \frac{1}{\varphi} - a_{k+m} f_J \cdot \frac{1}{\varphi} \right) (z_1, \dots, z_k, w, z_{k+1}, \dots, z_n) dw \wedge d\overline{w}$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{B_{\epsilon_{k+1}}(0)} \frac{1}{(w - z_{k+1})\varphi} \cdot \left(\frac{\partial f_J}{\partial \overline{z}_{k+m}} - a_{k+m} f_J \right) (z_1, \dots, z_k, w, z_{k+1}, \dots, z_n) dw$$
$$\wedge d\overline{w} = 0.$$

განვსაზღვროთ

$$\widetilde{\Phi}_J := \varphi \cdot h_J : U \to \mathbb{C},$$

რომელიც $B_\epsilon(0)$-ზე აკმაყოფილებს:

$$\frac{\partial \widetilde{\Phi}_J}{\partial \overline{z}_{k+1}} - a_{k+1} \widetilde{\Phi}_J = \frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}_{k+1}} \cdot h_J + \varphi \cdot \frac{\partial h_J}{\partial \overline{z}_{k+1}} - a_{k+1} \varphi h_J = a_{k+1} \varphi h_J + \varphi \cdot \frac{f_J}{\varphi} - a_{k+1} \varphi h_J = f_J,$$

ხოლო $m \in \{2, \dots, n-k\}$-კი

$$\frac{\partial \widetilde{\Phi}_J}{\partial \overline{z}_{k+m}} - a_{k+m} \widetilde{\Phi}_J = h_J \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{z}_{k+m}} - a_{k+m} \varphi \right) = 0.$$

განვსაზღვროთ

$$\Phi_J := (-1)^{|J|}\widetilde{\Phi}_J,$$

და

$$\eta_0 := \sum_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,k\},\\ |J|=q-1}} \Phi_J d\overline{z}_J \in \mathcal{A}^{0,q-1}_{\mathbb{C}^n}(U).$$

ვინაიდან $B_\epsilon(0)$-ზე

$$\sum_{j=k+2}^{n}\left(\frac{\partial\Phi_J}{\partial\overline{z}_j} - a_j\Phi_J\right)d\overline{z}_j = 0,$$

$B_\epsilon(0)$-ზე

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_\alpha(\eta_0) := &\sum_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,k\},\\ |J|=q-1}}\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial\Phi_J}{\partial\overline{z}_j} - a_j\Phi_J\right)d\overline{z}_j\right)\wedge d\overline{z}_J \\
&= \sum_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,k\},\\ |J|=q-1}}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\Phi_J}{\partial\overline{z}_j} - a_j\Phi_J\right)d\overline{z}_j + \left(\frac{\partial\Phi_J}{\partial\overline{z}_{k+1}} - a_{k+1}\Phi_J\right)d\overline{z}_{k+1}\right)\wedge d\overline{z}_J \\
&= \sum_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,k\},\\ |J|=q-1}}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\Phi_J}{\partial\overline{z}_j} - a_j\Phi_J\right)d\overline{z}_j + (-1)^{|J|}f_J d\overline{z}_{k+1}\right)\wedge d\overline{z}_J \\
&= \sum_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,k\},\\ |J|=q-1}}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\Phi_J}{\partial\overline{z}_j} - a_j\Phi_J\right)d\overline{z}_j\right)\wedge d\overline{z}_J + \sum_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,k\},\\ |J|=q-1}}(-1)^{|J|}f_J d\overline{z}_{k+1}\wedge d\overline{z}_J \\
&= \sum_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,k\},\\ |J|=q-1}}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\Phi_J}{\partial\overline{z}_j} - a_j\Phi_J\right)d\overline{z}_j\right)\wedge d\overline{z}_J + \sum_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,k\},\\ |J|=q-1}}(-1)^{2|J|}f_J d\overline{z}_J\wedge d\overline{z}_{k+1} \\
&= \sum_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,k\},\\ |J|=q-1}}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\Phi_J}{\partial\overline{z}_j} - a_j\Phi_J\right)d\overline{z}_j\right)\wedge d\overline{z}_J + \left(\sum_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,k\},\\ |J|=q-1}} f_J d\overline{z}_J\right)\wedge d\overline{z}_{k+1};
\end{aligned}$$

იმავე არეზე

$$\omega-\overline{\partial}_\alpha(\eta_0)=\left(\sum_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,k\}\\|J|=q-1}} f_J d\overline{z}_J\right)\wedge d\overline{z}_{k+1}+\sum_{\substack{K\subseteq\{1,\dots,k\}\\|K|=q}} g_K d\overline{z}_K$$

$$-\sum_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,k\},\\|J|=q-1}}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\Phi_J}{\partial\overline{z}_j}-a_j\Phi_J\right)d\overline{z}_j\right)\wedge d\overline{z}_J-\left(\sum_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,k\},\\|J|=q-1}} f_J d\overline{z}_J\right)\wedge d\overline{z}_{k+1}$$

$$=\sum_{\substack{K\subseteq\{1,\dots,k\}\\|K|=q}} g_K d\overline{z}_K-\sum_{\substack{J\subseteq\{1,\dots,k\},\\|J|=q-1}}\left(\sum_{j=1}^{k}\left(\frac{\partial\Phi_J}{\partial\overline{z}_j}-a_j\Phi_J\right)d\overline{z}_j\right)\wedge d\overline{z}_J\,;$$

α-ს $\overline{\partial}$-ჩაკეტილობიდან გამომდინარე:

$$\overline{\partial}_\alpha\left(\omega-\overline{\partial}_\alpha(\eta_0)\right)=-\overline{\partial}_\alpha\left(\overline{\partial}_\alpha(\eta_0)\right)=-\overline{\partial}_\alpha\left(\overline{\partial}(\eta_0)-\alpha\wedge\eta_0\right)$$

$$=-\left(\overline{\partial}\left(\overline{\partial}(\eta_0)-\alpha\wedge\eta_0\right)-\alpha\wedge\left(\overline{\partial}(\eta_0)-\alpha\wedge\eta_0\right)\right)$$

$$=-\left(-\overline{\partial}(\alpha\wedge\eta_0)-\alpha\wedge\overline{\partial}(\eta_0)\right)=\overline{\partial}(\alpha)\wedge\eta_0-\alpha\wedge\overline{\partial}(\eta_0)+\alpha\wedge\overline{\partial}(\eta_0)=0;$$

ამგვარად ფორმა $\omega-\overline{\partial}_\alpha(\eta_0)\in\mathcal{A}^{0,q}_{\mathbb{C}^n}(U)$ აკმაყოფილებს ინდუქციური დაშვების პირობებს და, მაშასადამე, არსებობს ისეთი $\eta_1\in\mathcal{A}^{0,q-1}_{\mathbb{C}^n}\left(B_\epsilon(0)\right)$, რომ

$$\omega-\overline{\partial}_\alpha(\eta_0)=\overline{\partial}_\alpha(\eta_1),$$

ამგვარად, $B_\epsilon(0)$-ზე

$$\omega=\overline{\partial}_\alpha(\eta_0)+\overline{\partial}_\alpha(\eta_1)=\overline{\partial}_\alpha(\eta_0+\eta_1),$$

ანუ, ფორმისათვის $\eta:=\eta_0+\eta_1\in\mathcal{A}^{0,q-1}_{\mathbb{C}^n}\left(B_\epsilon(0)\right)$

$$\omega|_{B_\epsilon(0)}=\overline{\partial}_\alpha(\eta).$$

□

$\overline{\partial}_\alpha$-პუანკარეს ლემა სამართლიანია შემოუსაზღვრელი პოლიდისკისთვისაც, ანუ:

ლემა. $q>0$-ისთვის თუ $\omega\in\mathcal{A}^{p,q}_{\mathbb{C}^n}\left(B_\epsilon(0)\right)$, სადაც დაშვებულია პოლიდისკი იყოს შემოუსაზღვრელი, მაგალითად, $\epsilon_j=+\infty$, ჩაკეტილია $\overline{\partial}_\alpha$-ის მიმართ, მაშინ არსებობს $\eta\in\mathcal{A}^{p,q-1}_{\mathbb{C}^n}\left(B_\epsilon(0)\right)$ ისეთი, რომ $\omega=\overline{\partial}_\alpha\eta$.

დამტკიცება. განვიხილოთ მკაცრად ზრდადი მიმდევრობა:

$$\left(\epsilon_{jm}\right)_{m\in\mathbb{N}},\qquad \lim_{m\to\infty}\epsilon_{jm}=\epsilon_j,$$

და მისი თვითოეული წევრისთვის ϵ_{jm} აღვნიშნოთ შესაბამისი შემოსაზღვრული პოლიდისკი $B_m(0)$-ით, ანუ:

$$B_m(0) := \{z \in \mathbb{C}^n \big| |z_1| < \epsilon_1, \dots, |z_j| < \epsilon_{jm}, \dots |z_n| < \epsilon_n\} \subseteq B_\epsilon(0),$$

მიიღება ამგვარად შემოსაზღვრულ პოლიდისკთა მიმდევრობა $\left(B_m(0)\right)_{m\in\mathbb{N}}$ თვისებით, რომ:

$$B_1(0) \subseteq B_2(0) \subseteq \dots \subseteq \bigcup_{m\in\mathbb{N}} B_m(0) = B_\epsilon(0).$$

$\overline{\partial}_\alpha$-პუანკარეს ლემის ძალით შემოსაზღვრულ პოლიდისკთა შემთხვევისათვის ყოველი $m \in \mathbb{N}$-ისთვის არსებობს $\eta'_m \in \mathcal{A}^{p,q-1}_{\mathbb{C}^n}\left(B_{m+1}(0)\right)$ ისეთი, რომ

$$\overline{\partial}_\alpha \eta'_m = \omega|_{B_{m+1}(0)};$$

გლუვი ფუნქციისათვის $\rho \in C^\infty\left(B_\epsilon(0)\right)$ საყრდენით $B_{m+1}(0)$-ში და $B_m(0)$-ზე იგივურად 1-ის ტოლით, ანუ,

$$\mathrm{supp}(\rho) \subseteq B_{m+1}(0), \qquad \rho|_{B_m(0)} \equiv 1,$$

აღვნიშნოთ

$$\eta_m := \rho|_{B_{m+1}(0)} \cdot \eta'_m \in \mathcal{A}^{p,q-1}_{\mathbb{C}^n}\left(B_{m+1}(0)\right);$$

მისთვის გვექნება

$$\left(\overline{\partial}_\alpha \eta_m\right)|_{B_m(0)} = \overline{\partial}_\alpha\left(\eta_m|_{B_m(0)}\right) = \left(\overline{\partial}_\alpha(\eta'_m)\right)|_{B_m(0)} = \left(\omega|_{B_{m+1}(0)}\right)|_{B_m(0)} = \omega|_{B_m(0)},$$

და ის შეიძლება გლუვად გაგრძელდეს ფორმამდე მთელს $B_\epsilon(0)$-ზე, რომელი გაგრძელებისთვისაც გამოვიყენოოთ იგივე აღნიშნვა $\eta_m \in \mathcal{A}^{p,q-1}_{\mathbb{C}^n}(B_\epsilon)$.

$q > 1$-ისთვის შეიძლება აიგოს მიმდევრობა $(\eta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ მქონე ზემომოყვანილი თვისებისა და დამატებით დამაკმაყოფილებელი პირობისა

$$\eta_m|_{B_{m-1}} = \eta_{m+1}|_{B_{m-1}};$$

რის საჩვენებლადაც დავუშვათ, რომ უკვე აგებულია პირველი m წევრი ასეთი მიმდევრობისა $\eta_1, \dots, \eta_m \in \mathcal{A}^{p,q-1}_{\mathbb{C}^n}\left(B_\epsilon(0)\right)$; ნებისმიერი ფორმისთვის $\tilde{\eta}_{m+1} \in \mathcal{A}^{p,q-1}_{\mathbb{C}^n}\left(B_\epsilon(0)\right)$ თვისებით

$$\left(\overline{\partial}_\alpha \tilde{\eta}_{m+1}\right)|_{B_{m+1}(0)} = \omega|_{B_{m+1}(0)},$$

სრულდება

$$\begin{aligned}\overline{\partial}_\alpha\left((\eta_m - \tilde{\eta}_{m+1})|_{B_m(0)}\right) &= \left(\overline{\partial}_\alpha(\eta_m - \tilde{\eta}_{m+1})\right)|_{B_m(0)} = \left(\overline{\partial}_\alpha \eta_m\right)|_{B_m(0)} - \left(\overline{\partial}_\alpha \tilde{\eta}_{m+1}\right)|_{B_m(0)} \\ &= \omega|_{B_m(0)} - \left(\overline{\partial}_\alpha \tilde{\eta}_{m+1}\right)|_{B_{m+1}(0)}|_{B_m(0)} = \omega|_{B_m(0)} - \omega|_{B_{m+1}(0)}|_{B_m(0)} \\ &= \omega|_{B_m(0)} - \omega|_{B_m(0)} = 0,\end{aligned}$$

ამიტომ არსებობს ისეთი $\zeta \in \mathcal{A}^{p,q-2}_{\mathbb{C}^n}\left(B_m(0)\right)$, რომ

$$(\eta_m - \tilde{\eta}_{m+1})|_{B_m(0)} = \overline{\partial}_\alpha \zeta;$$

გლუვი ფუნქციის მეშვეობით $\rho \in C^\infty(B_\epsilon)$ თვისებებით

$$\mathrm{supp}(\rho) \subseteq B_m(0), \qquad \rho|_{B_{m-1}(0)} \equiv 1,$$

განვსაზღვროთ ფორმა

$$\eta_{m+1} := \tilde{\eta}_{m+1} + \overline{\partial}_\alpha(\rho \cdot \zeta) \in \mathcal{A}^{p,q-1}_{\mathbb{C}^n}\big(B_\epsilon(0)\big),$$

რომელიც აკმაყოფილებს ტოლობებს

$$\begin{aligned}
\eta_{m+1}|_{B_{m-1}(0)} &= \left(\tilde{\eta}_{m+1} + \overline{\partial}_\alpha(\rho \cdot \zeta)\right)|_{B_{m-1}(0)} = \tilde{\eta}_{m+1}|_{B_{m-1}(0)} + \left(\overline{\partial}_\alpha(\rho \cdot \zeta)\right)|_{B_{m-1}(0)} \\
&= \tilde{\eta}_{m+1}|_{B_{m-1}(0)} + \overline{\partial}_\alpha\left((\rho \cdot \zeta)|_{B_{m-1}(0)}\right) \\
&= \tilde{\eta}_{m+1}|_{B_{m-1}(0)} + \overline{\partial}_\alpha\big(\rho|_{B_{m-1}(0)} \cdot \zeta|_{B_{m-1}(0)}\big) = \tilde{\eta}_{m+1}|_{B_{m-1}(0)} + (\overline{\partial}_\alpha \zeta)|_{B_{m-1}(0)} \\
&= \tilde{\eta}_{m+1}|_{B_{m-1}(0)} + \left((\eta_m - \tilde{\eta}_{m+1})|_{B_m(0)}\right)|_{B_{m-1}(0)} \\
&= \tilde{\eta}_{m+1}|_{B_{m-1}(0)} + (\eta_m - \tilde{\eta}_{m+1})|_{B_{m-1}(0)} \\
&= \tilde{\eta}_{m+1}|_{B_{m-1}(0)} + \eta_m|_{B_{m-1}(0)} - \tilde{\eta}_{m+1}|_{B_{m-1}(0)} = \eta_m|_{B_{m-1}(0)}
\end{aligned}$$

და

$$(\overline{\partial}_\alpha \eta_{m+1})|_{B_{m+1}(0)} = \left(\overline{\partial}_\alpha\left(\tilde{\eta}_{m+1} + \overline{\partial}_\alpha(\rho \cdot \zeta)\right)\right)|_{B_{m+1}(0)} = (\overline{\partial}_\alpha \tilde{\eta}_{m+1})|_{B_{m+1}(0)} = \omega|_{B_{m+1}(0)},$$

ვინაიდან $\overline{\partial}$-ჩაკეტილი α-ისთვის $\overline{\partial}_\alpha \circ \overline{\partial}_\alpha = 0$; ამგვარად მიღებული მიმდევრობა $(\eta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ კრებადია, მისი ზღვარი $\eta \in \mathcal{A}^{p,q-1}_{\mathbb{C}^n}\big(B_\epsilon(0)\big)$

კი აკმაყოფილებს

$$\overline{\partial}_\alpha \eta = \omega.$$

$q = 1$ შემთხვევისათვის ავაგოთ მიმდევრობა $(\eta_m)_{m\in\mathbb{N}}$ თვისებით

$$\left\|\eta_{m+1}|_{B_{m-1}(0)} - \eta_m|_{B_{m-1}(0)}\right\|_\infty < \frac{1}{2^m};$$

დავუშვათ, უკვე აგებულია ასეთი მიმდევრობის პირველი m წევრი $\eta_1, \dots, \eta_m \in \mathcal{A}^{p,q-1}_{\mathbb{C}^n}\big(B_\epsilon(0)\big)$; ფორმისათვის $\tilde{\eta}_{m+1} \in \mathcal{A}^{p,0}_{\mathbb{C}^n}\big(B_\epsilon(0)\big)$ თვისებით

$$(\overline{\partial}_\alpha \tilde{\eta}_{m+1})|_{B_{m+1}(0)} = \omega|_{B_{m+1}(0)},$$

სხვაობა $\eta_m - \tilde{\eta}_{m+1}$ აკმაყოფილებს

$$\begin{aligned}
\overline{\partial}_\alpha\left((\eta_m - \tilde{\eta}_{m+1})|_{B_m(0)}\right) &= \left(\overline{\partial}_\alpha(\eta_m - \tilde{\eta}_{m+1})\right)|_{B_m(0)} \\
&= (\overline{\partial}_\alpha \eta_m)|_{B_m(0)} - \left((\overline{\partial}_\alpha \tilde{\eta}_{m+1})|_{B_{m+1}(0)}\right)|_{B_m(0)} = \omega|_{B_m(0)} - \omega|_{B_m(0)} = 0,
\end{aligned}$$

მაშასადამე, $(\eta_m - \tilde{\eta}_{m+1})|_{B_m(0)} \in \mathcal{A}^{p,0}_{\mathbb{C}^n}\big(B_m(0)\big)$ არის $\overline{\partial}_\alpha$-ის ბირთვში, რომელიც იზომორფულია, როგორც $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}\big(B_m(0)\big)$-მოდული, იმავე ტიპის ჰოლომორფულ

დიფერენციალურ ფორმათა მოდულის $\Omega^p_{\mathbb{C}^n}\big(B_m(0)\big)$, რომელი იზომორფიზმიც მოიცემა $e^{f|_{B_m(0)}}$-ზე გამრავლებით, სადაც $f \in C^\infty\big(B_\epsilon(0)\big)$, ისეთი, რომ

$$\overline{\partial} f|_{B_m(0)} = \alpha|_{B_m(0)},$$

ანუ არსებობს ჰოლომორფული ფორმა $\zeta \in \Omega^p_{\mathbb{C}^n}\big(B_m(0)\big)$ ისეთი, რომ

$$(\eta_m - \tilde{\eta}_{m+1})|_{B_m(0)} = e^{f|_{B_m(0)}} \cdot \zeta;$$

ამ ჰოლომორფულ ფორმას უფრო მცირე პოლიდისკზე $B_{m-1}(0) \subseteq B_m(0)$ შესაძლოა მივუახლოვდეთ ფორმით პოლინომიალური კოეფიციენტ ფუნქციებით

$$\sum_{|I|=p} P_I dz_I,$$

შესაბამისად:

$$\left\| \eta_m - \tilde{\eta}_{m+1} - e^{f|_{B_{m-1}(0)}} \cdot \left(\sum_{|I|=p} P_I dz_I\right)\right\|_\infty = \left\| e^{f|_{B_{m-1}(0)}} \cdot \zeta - e^{f|_{B_{m-1}(0)}} \cdot \left(\sum_{|I|=p} P_I dz_I\right)\right\|_\infty$$

$$= \left\| e^{f|_{B_{m-1}(0)}} \cdot \left(\zeta - \left(\sum_{|I|=p} P_I dz_I\right)\right)\right\|_\infty = \max_{z \in B_{m-1}(0)} e^{f(z)} \cdot \left\| \zeta - \sum_{|I|=p} P_I dz_I \right\|_\infty$$

$$< \frac{1}{2^m},$$

განვსაზღვროთ ფორმა

$$\eta_{m+1} := \tilde{\eta}_{m+1} + e^f \cdot \sum_{|I|=p} P_I dz_I \in \mathcal{A}^{p,0}_{\mathbb{C}^n}\big(B_\epsilon(0)\big);$$

ის აკმაყოფილებს:

$$\big(\overline{\partial}_\alpha \eta_{m+1}\big)|_{B_{m+1}(0)} = \left(\overline{\partial}_\alpha\left(\tilde{\eta}_{m+1} + e^f \cdot \sum_{|I|=p} P_I dz_I\right)\right)|_{B_{m+1}(0)}$$

$$= \big(\overline{\partial}_\alpha \tilde{\eta}_{m+1}\big)|_{B_{m+1}(0)}$$

$$+ \left(e^{f|_{B_{m+1}(0)}} \alpha \wedge \sum_{|I|=p} P_I dz_I - e^{f|_{B_{m+1}(0)}} \alpha \wedge \sum_{|I|=p} P_I dz_I\right)|_{B_{m+1}(0)}$$

$$= \big(\overline{\partial}_\alpha \tilde{\eta}_{m+1}\big)|_{B_{m+1}(0)},$$

და

$$\left\|(\eta_{m+1}-\eta_m)|_{B_{m-1}(0)}\right\|_\infty = \left\|\left(\tilde{\eta}_{m+1} + e^f \cdot \sum_{|I|=p} P_I dz_I - \eta_m\right)|_{B_{m-1}(0)}\right\|_\infty$$

$$= \left\|\eta_m - \tilde{\eta}_{m+1} - e^{f|_{B_{m-1}(0)}} \cdot \sum_{|I|=p} P_I dz_I\right\|_\infty = \left\|e^{f|_{B_{m-1}(0)}}\left(\zeta - \sum_{|I|=p} P_I dz_I\right)\right\|_\infty$$

$$< \frac{1}{2^m},$$

B_{m-1}-ზე.

□

ფსევდოანალიზურ დიფერენციალურ ფორმათა კონა

განსაზღვრება. კომპლექსურ მრავალსახეობაზე X გლობალური $(0,1)$-ტიპის 1-ფორმის $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(X)$ მიმართ აღვნიშნოთ $\Psi_{X,\alpha}^p$-ით შესაბამება ყოველი ღია ქვესიმრავლისათვის $U \subseteq X$ სიმრავლისა

$$U \mapsto \Psi_{X,\alpha}^p(U) \equiv \Gamma\left(U, \Psi_{X,\alpha}^p\right) := \left\{\omega \in \mathcal{A}_X^{p,0}(U) \middle| \bar{\partial}\omega = \alpha|_U \wedge \omega\right\},$$

ხოლო ყოველი ჩართვისთვის $U \subseteq V$ კი ასახვისა

$$U \subseteq V \mapsto r_U^V: \Psi_{X,\alpha}^p(V) \to \Psi_{X,\alpha}^p(U), \qquad \omega \mapsto r_U^V(\omega) := \omega|_U;$$

მოცემული შესაბამება აკმაყოფილებს კონის ყველა აქსიომას, მას α-*ფსევდოანალიზურ* p-*დიფერენციალურ ფორმათა* კონა ეწოდება.

ეს შესაბამება აკმაყოფილებს სერის აქსიომებს:

1. თუ კვეთებისათვის $\omega, \eta \in \Psi_{X,\alpha}^p(U)$ და $U = \bigcup_{j\in J} U_j$ დაფარვისთვის $\omega|_{U_j} = \eta|_{U_j}$ ყოველი $j \in J$-ისთვის, მაშინ $\omega = \eta$.
2. $U = \bigcup_{j\in J} U_j$ დაფარვისათვის და კვეთებისათვის $\left(\omega_j \in \Psi_{X,\alpha}^p(U_j)\right)_{j\in J}$, რომლებისთვისაც $\omega_j|_{U_j\cap U_k} = \omega_k|_{U_j\cap U_k}$, ყოველი $j,k \in J, U_j \cap U_k \neq \emptyset$-ისთვის, არსებობს $\omega \in \Psi_{X,\alpha}^p(U)$ ისეთი, რომ $\omega|_{U_j} = \omega_j$ ყოველი $j \in J$-ისთვის, განსაზღვრული შემდეგნაირად: ყოველი $P \in U$-ისთვის $\omega(P) = \omega_j(P)$, სადაც $P \in U_j$, რომელი განსაზღვრებაც $\omega_j|_{U_j\cap U_k} = \omega_k|_{U_j\cap U_k}$ პირობის ძალით კორექტულია.

მაშასადამე ის კონაა.

ამგვარად განსაზღვრული კონა შემდეგნაირად განსაზღვრული $\mathcal{O}_X$-მოდულთა კონათა ჰომომორფიზმის ბირთვია:

$$\overline{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q} \to \mathcal{A}_X^{p,q+1},$$

$$\overline{\partial}_\alpha^U \equiv \overline{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q}(U) \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}(U), \qquad \omega \mapsto \overline{\partial}_\alpha(\omega) := \overline{\partial}\omega - \alpha|_U \wedge \omega,$$

მაშასადამე,

$$\Psi_{X,\alpha}^p = \ker\left(\overline{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,0} \to \mathcal{A}_X^{p,1}\right),$$

კერძოდ, ის $\mathcal{O}_X$-მოდულთა კონაა.

ჰოლომორფული ასახვის

$$f : Y \to X$$

გასწვრივ ფორმათა უკან გადმოტანა X-იდან Y-ზე ინდუცირებს ასახვას:

$$\Psi_{X,\alpha}^p(U) \to \Psi_{Y,f^*\alpha}^p\left(f^{-1}(U)\right), \qquad \omega \mapsto f^*\omega,$$

რომლის კორექტულობაც ეფუძვნება უკან გადმოტანის კომუტირებას გარე გაწარმოების, გარე ნამრავლისა და, ჰოლომორფული ასახვის შემთხვევაში, მოცემული ტიპის კომპონენტის აღების ოპერაციებთან:

$$\overline{\partial}(f^*\omega) = (\Pi^{p,1} \circ d)(f^*\omega) = \Pi^{p,1}\big(d(f^*\omega)\big) = \Pi^{p,1}\big(f^*d(\omega)\big) = f^*\left(\Pi^{p,1}\big(d(\omega)\big)\right) = f^*\big(\overline{\partial}\omega\big)$$
$$= f^*(\alpha \wedge \omega) = f^*(\alpha) \wedge f^*(\omega),$$

რასაც ლოკალური კოორდინატული სისტემების მიმართ აქვს შემდეგი სახე: $\dim_{\mathbb{C}} X = n$, $\dim_{\mathbb{C}} Y = m$; ლოკალური კოორდინატული ფუნქციები: $z_1, \dots, z_n : V \to \mathbb{C}, V \cap U \neq \emptyset$ და $w_1, \dots, w_m : V' \to \mathbb{C}, V' \cap f^{-1}(V \cap U) \neq \emptyset$; მათ მიმართ ჩაწერილი p-ფორმისთვის

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_p \le n} g_{j_1 \dots j_p} dz_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_p},$$

f-ის ჰოლომორფულობიდან გამომდინარე ვინაიდან

$$\frac{\partial f_j}{\partial \overline{w}_k} = 0, \qquad (j,k) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}, \qquad f_j := w_j \circ f,$$

სამართლიანია ტოლობა:

$$\overline{\partial}\left(f^*\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n} g_{j_1\dots j_p} dz_{j_1}\wedge\ldots\wedge dz_{j_p}\right)\right)=\overline{\partial}\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n}\left(g_{j_1\dots j_p}\circ f\right)df_{j_1}\wedge\ldots\wedge df_{j_p}\right)$$

$$=\overline{\partial}\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n}\left(g_{j_1\dots j_p}\circ f\right)\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f_{j_1}}{\partial w_k}dw_k\right)\wedge\ldots\wedge\left(\sum_{l=1}^{m}\frac{\partial f_{j_p}}{\partial w_l}dw_l\right)\right)$$

$$=\overline{\partial}\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n}\left(g_{j_1\dots j_p}\circ f\right)\sum_{(k_1,\dots,k_p)\in\{1,\dots,m\}^p}\left(\prod_{l=1}^{p}\frac{\partial f_{j_l}}{\partial w_{k_l}}\right)dw_{k_1}\wedge\ldots\wedge dw_{k_p}\right)$$

$$=\overline{\partial}\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n}\left(g_{j_1\dots j_p}\circ f\right)\sum_{1\le k_1<\cdots<k_p\le m}\left(\sum_{\pi\in S_m}\operatorname{sgn}(\pi)\left(\prod_{l=1}^{p}\frac{\partial f_{j_l}}{\partial w_{k_{\pi(l)}}}\right)\right)dw_{k_1}\wedge\ldots\wedge dw_{k_p}\right)$$

$$=\overline{\partial}\left(\sum_{1\le k_1<\cdots<k_p\le m}\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n}\left(\sum_{\pi\in S_m}\operatorname{sgn}(\pi)\left(\prod_{l=1}^{p}\frac{\partial f_{j_l}}{\partial w_{k_{\pi(l)}}}\right)\right)\left(g_{j_1\dots j_p}\circ f\right)\right)dw_{k_1}\wedge\ldots\right.$$

$$\left.\wedge\, dw_{k_p}\right)$$

$$=\sum_{1\le k_1<\cdots<k_p\le m}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n}\left(\sum_{\pi\in S_m}\operatorname{sgn}(\pi)\left(\prod_{l=1}^{p}\frac{\partial f_{j_l}}{\partial w_{k_{\pi(l)}}}\right)\right)\frac{\partial\left(g_{j_1\dots j_p}\circ f\right)}{\partial\overline{w}_k}\right)d\overline{w}_k\right)$$

$$\wedge\, dw_{k_1}\wedge\ldots\wedge dw_{k_p}$$

უკანასკნელის სამართლიანობა გამომდინარეობს $\frac{\partial f_j}{\partial w_k}$-ის ჰოლომორფულობიდან ყოველი $(j,k)\in\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}$-ისთვის;

$$\overline{\partial}\left(f^*\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n} g_{j_1\dots j_p} dz_{j_1}\wedge\dots\wedge dz_{j_p}\right)\right)$$

$$= \sum_{1\le k_1<\cdots<k_p\le m}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n}\left(\sum_{\pi\in S_m}\operatorname{sgn}(\pi)\left(\prod_{l=1}^{p}\frac{\partial f_{j_l}}{\partial w_{k_{\pi(l)}}}\right)\right)\left(\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial g_{j_1\dots j_p}}{\partial \overline{z}_l}\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\circ f\right)\cdot\overline{\frac{\partial f_l}{\partial w_k}}\right)\right)d\overline{w}_k\right)\wedge dw_{k_1}\wedge\dots\wedge dw_{k_p}$$

$$= \sum_{1\le k_1<\cdots<k_p\le m}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n}\left(\sum_{\pi\in S_m}\operatorname{sgn}(\pi)\left(\prod_{l=1}^{p}\frac{\partial f_{j_l}}{\partial w_{k_{\pi(l)}}}\right)\right)\left(\sum_{l=1}^{n}\left(\left(a_l\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\left.\left.\cdot g_{j_1\dots j_p}\right)\circ f\right)\cdot\overline{\frac{\partial f_l}{\partial w_k}}\right)\right)d\overline{w}_k\right)\wedge dw_{k_1}\wedge\dots\wedge dw_{k_p}$$

მეორეს მხრივ,

$$f^*\left(\sum_{k=1}^{n} a_k d\overline{z}_k\right) = \sum_{k=1}^{n}(a_k\circ f)d\overline{f}_k = \sum_{k=1}^{n}(a_k\circ f)\cdot\left(\sum_{l=1}^{m}\overline{\frac{\partial f_k}{\partial w_l}}\,d\overline{w}_l\right)$$

$$= \sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k\circ f)\cdot\overline{\frac{\partial f_k}{\partial w_l}}\right)d\overline{w}_l$$

$$f^*\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n} g_{j_1\dots j_p} dz_{j_1}\wedge\dots\wedge dz_{j_p}\right)$$

$$= \sum_{1\le k_1<\cdots<k_p\le m}\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n}\left(\sum_{\pi\in S_m}\operatorname{sgn}(\pi)\left(\prod_{l=1}^{p}\frac{\partial f_{j_l}}{\partial w_{k_{\pi(l)}}}\right)\right)\left(g_{j_1\dots j_p}\circ f\right)\right)dw_{k_1}$$

$$\wedge\dots\wedge dw_{k_p}$$

და

$$\left(f^*\left(\sum_{k=1}^{n} a_k d\overline{z}_k\right)\right) \wedge \left(f^*\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n} g_{j_1\cdots j_p} dz_{j_1} \wedge \ldots \wedge dz_{j_p}\right)\right)$$

$$= \left(\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k \circ f)\cdot \overline{\frac{\partial f_k}{\partial w_l}}\right) d\overline{w}_l\right)$$

$$\wedge \left(\sum_{1\le k_1<\cdots<k_p\le m}\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n}\left(\sum_{\pi\in S_m}\operatorname{sgn}(\pi)\left(\prod_{l=1}^{p}\frac{\partial f_{j_l}}{\partial w_{k_{\pi(l)}}}\right)\right)\left(g_{j_1\cdots j_p}\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\circ f\right)\right) dw_{k_1} \wedge \ldots \wedge dw_{k_p}\right)$$

$$= \sum_{1\le k_1<\cdots<k_p\le m}\sum_{l=1}^{m}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k \circ f)\right.\right.$$

$$\left.\cdot \overline{\frac{\partial f_k}{\partial w_l}}\right)\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n}\left(\sum_{\pi\in S_m}\operatorname{sgn}(\pi)\left(\prod_{l=1}^{p}\frac{\partial f_{j_l}}{\partial w_{k_{\pi(l)}}}\right)\right)\left(g_{j_1\cdots j_p}\circ f\right)\right) d\overline{w}_l\Bigg)$$

$$\wedge\, dw_{k_1} \wedge \ldots \wedge dw_{k_p}$$

$$= \sum_{1\le k_1<\cdots<k_p\le m}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n}\left(\sum_{\pi\in S_m}\operatorname{sgn}(\pi)\left(\prod_{l=1}^{p}\frac{\partial f_{j_l}}{\partial w_{k_{\pi(l)}}}\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}(a_k\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\circ f)\cdot\left(g_{j_1\cdots j_p}\circ f\right)\cdot\overline{\frac{\partial f_k}{\partial w_l}}\right)\right) d\overline{w}_l\right) \wedge dw_{k_1} \wedge \ldots \wedge dw_{k_p}$$

$$= \sum_{1\le k_1<\cdots<k_p\le m}\left(\sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_p\le n}\left(\sum_{\pi\in S_m}\operatorname{sgn}(\pi)\left(\prod_{l=1}^{p}\frac{\partial f_{j_l}}{\partial w_{k_{\pi(l)}}}\right)\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\left(a_k\right.\right.\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot g_{j_1\dots j_p}\right)\circ f\right)\cdot\frac{\overline{\partial f_k}}{\partial w_l}\right)\right)d\overline{w}_l\Bigg)\wedge dw_{k_1}\wedge\dots\wedge dw_{k_p},$$

მაშასადამე,

$$\overline{\partial}\left(f^*\left(\sum_{1\le j_1<\dots<j_p\le n} g_{j_1\dots j_p}dz_{j_1}\wedge\dots\wedge dz_{j_p}\right)\right)$$
$$=\left(f^*\left(\sum_{k=1}^{n} a_k d\overline{z}_k\right)\right)\wedge\left(f^*\left(\sum_{1\le j_1<\dots<j_p\le n} g_{j_1\dots j_p}dz_{j_1}\wedge\dots\wedge dz_{j_p}\right)\right).$$

დებულება. $\Psi_{X,\alpha}^p$-სა და Ω_X^p-ს ნებისმიერი $p\in\mathbb{N}$-ისთვის აქვთ იზომორფული ფენები, ანუ, ყოველი წერტილისათვის $Q\in X$

$$\Psi_{X,\alpha,Q}^p\cong\Omega_{X,Q}^p.$$

დამტკიცება. ვინაიდან $\alpha\in\mathcal{A}_X^{0,1}(X)$ ჩაკეტილია $\overline{\partial}$-ის მიმართ, ის ლოკალურად $\overline{\partial}$-ზუსტია; $Q\in X$ წერტილისათვის $Q\in U\subseteq X$ იყოს ისეთი მიდამო, რომელზეც α-ს შეზღუდვა ზუსტია, ანუ რომელზეც არსებობს ისეტი $f\in C_X^\infty(U)$, რომ $\alpha|_U=\overline{\partial}f$; განვსაზღვროთ

$$\Omega_{X,Q}^p\to\Psi_{X,\alpha,Q}^p,\qquad[(\omega,V)]\mapsto[(e^f|_{U\cap V}\cdot\omega|_{U\cap V},U\cap V)];$$

ვინაიდან

$$\overline{\partial}(e^f\cdot\omega)=\overline{\partial}(e^f)\wedge\omega+e^f\cdot\overline{\partial}(\omega)=e^f\cdot\alpha\wedge\omega+0=e^f\cdot\alpha\wedge\omega=\alpha\wedge(e^f\cdot\omega),$$

$e^f|_{U\cap V}\cdot\omega|_{U\cap V}\in\Psi_{X,\alpha}^p(U\cap V)$, მოცემული შესაბამება დამოუკიდებელია ექვივალენტობი კლასის წარმომადგენელის შერჩევისაგან, ანუ, მართლაც გვაქვს ასახვა, რომელიც $\mathcal{O}_{X,Q}$-მოდულთა ჰომომორფიზმია; რადგან e^f არსადაა 0-ის ტოლი, $\frac{1}{e^f}$-ზე გამრავლება გვაძლევს ორმხრივ შებრუნებულ ასახვას, ვინაიდან $\eta\in\Psi_{X,\alpha}^p(W)$-ისთვის, $W\subseteq U$,

$$\overline{\partial}\left(\frac{1}{e^f}\cdot\eta\right)=\overline{\partial}\left(\frac{1}{e^f}\right)\wedge\eta+\frac{1}{e^f}\cdot\overline{\partial}(\eta)=-\frac{1}{e^f}\cdot\alpha\wedge\eta+\frac{1}{e^f}\cdot\alpha\wedge\eta=0;$$

მაშასადამე, $\frac{1}{e^f}\cdot\eta\in\Omega_X^p(W)$ და ასახვა

$$\Omega_{X,Q}^p\to\Psi_{X,\alpha,Q}^p,\qquad[(\omega,V)]\mapsto[(e^f|_{U\cap V}\cdot\omega|_{U\cap V},U\cap V)]$$

ბიექციურია.

□

დებულება. α-სა და $\alpha+\bar{\partial}f$-სთან, სადაც $f \in C_X^\infty(X)$, ასოცირებულ კონებს შორის არსებობს ბუნებრივი $\mathcal{O}_X$-მოდულთა იზომორფიზმი:

$$\Psi_{X,\alpha}^p \to \Psi_{X,\alpha+\bar{\partial}f}^p,$$

$$\Psi_{X,\alpha}^p(U) \to \Psi_{X,\alpha+\bar{\partial}f}^p(U), \qquad \omega \to e^{f|_U} \cdot \omega$$

შებრუნდებულით:

$$\Psi_{X,\alpha+\bar{\partial}f}^p \to \Psi_{X,\alpha}^p,$$

$$\Psi_{X,\alpha+\bar{\partial}f}^p(U) \to \Psi_{X,\alpha}^p(U), \qquad \omega \to \frac{1}{e^{f|_U}} \cdot \omega$$

დამტკიცება. $\omega \in \Psi_{X,\alpha}^p(U)$-ისთვის

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\left(e^{f|_U}\cdot\omega\right) &= \left(\bar{\partial}e^{f|_U}\right)\wedge\omega + e^{f|_U}\cdot\bar{\partial}\omega = \left(\bar{\partial}e^{f}\right)|_U\wedge\omega + e^{f|_U}\cdot\alpha|_U\wedge\omega \\ &= \left(e^f\cdot\bar{\partial}f\right)|_U\wedge\omega + \alpha|_U\wedge\left(e^{f|_U}\cdot\bar{\partial}\omega\right) \\ &= \left(\bar{\partial}f\right)|_U\wedge\left(e^{f|_U}\cdot\omega\right) + \alpha|_U\wedge\left(e^{f|_U}\cdot\bar{\partial}\omega\right) = \left(\alpha+\bar{\partial}f\right)|_U\wedge\left(e^{f|_U}\cdot\bar{\partial}\omega\right),\end{aligned}$$

ანუ, $e^{f|_U}\cdot\omega \in \Psi_{X,\alpha+\bar{\partial}f}^p(U)$, ხოლო $\omega \in \Psi_{X,\alpha+\bar{\partial}f}^p(U)$-ისთვის კი

$$\begin{aligned}\bar{\partial}\left(\frac{1}{e^{f|_U}}\cdot\omega\right) &= \left(\bar{\partial}\left(\frac{1}{e^{f|_U}}\right)\right)\wedge\omega + \frac{1}{e^{f|_U}}\cdot\bar{\partial}\omega = \left(\bar{\partial}\left(\frac{1}{e^{f}}\right)\right)|_U\wedge\omega + \frac{1}{e^{f|_U}}\cdot\left(\alpha|_U + (\bar{\partial}f)|_U\right)\wedge\omega \\ &= \left(-\frac{1}{e^f}\left(\bar{\partial}f\right)\right)|_U\wedge\omega + \left(\alpha|_U + (\bar{\partial}f)|_U\right)\wedge\left(\frac{1}{e^{f|_U}}\cdot\omega\right) \\ &= -\left(\bar{\partial}f\right)|_U\wedge\left(\frac{1}{e^{f|_U}}\cdot\omega\right) + \left(\alpha|_U + (\bar{\partial}f)|_U\right)\wedge\left(\frac{1}{e^{f|_U}}\cdot\omega\right) = \alpha|_U\wedge\left(\frac{1}{e^{f|_U}}\cdot\omega\right),\end{aligned}$$

ანუ, $\frac{1}{e^{f|_U}}\cdot\omega \in \Psi_{X,\alpha}^p(U)$.

□

ამ უკანასკნელის ძალით ყოველი $p \in \mathbb{N}$-ისთვის კორექტულადაა განსაზღვრული ასახვა

$$H_{\bar{\partial}}^{0,1}(X) \to {}^{\mathrm{Sh(X)}}/_{\sim}, \qquad [\alpha] \mapsto \left[\Psi_{X,\alpha}^p\right],$$

სადაც $\mathrm{Sh(X)}$ კონათა სიმრავლეა X-ზე, ხოლო $\sim$ კი - კონათა იზომორფულობის ექვივალენტობის მიმართება.

განზოგადოებული დოლბოს თეორემა

ყოველი $U \subseteq X$ ღია ქვესიმრავლისათვის და $\omega \in \mathcal{A}_X^{p,q}(U)$-ისთვის

$$\begin{aligned}\bar{\partial}_\alpha\circ\bar{\partial}_\alpha(\omega) &= \bar{\partial}_\alpha\left(\bar{\partial}\omega - \alpha|_U\wedge\omega\right) = -\bar{\partial}(\alpha|_U\wedge\omega) - \alpha|_U\wedge\bar{\partial}\omega \\ &= -\bar{\partial}(\alpha|_U)\wedge\omega + \alpha|_U\wedge\bar{\partial}(\omega) - \alpha|_U\wedge\bar{\partial}\omega = -\bar{\partial}(\alpha|_U)\wedge\omega,\end{aligned}$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ კონათა ჰომომორფიზმთა მიმდევრობა

$$0 \to \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q-1} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q+1} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \cdots$$

კომპლექსია მაშინ, და მხოლოდ მაშინ, თუ $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(X)$ ჩაკეტილია $\overline{\partial}$-ის მიმართ, რა შემთხვევაშიც კომპლექსის

$$0 \to \mathcal{A}_X^{p,0}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,1}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X) \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \cdots$$

q-კოჰომოლოგიის ჯგუფი აღვნიშნოთ $H_{\overline{\partial}_\alpha}^{p,q}(X)$, ანუ

$$H_{\overline{\partial}_\alpha}^{p,q}(X) := {\ker\left(\overline{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X)\right)} \Big/ {\operatorname{im}\left(\overline{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X) \to \mathcal{A}_X^{p,q}(X)\right)}.$$

თეორემა. X კომპლექსურ მრავალსახეობაზე $\overline{\partial}$-ჩაკეტილი $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(X)$-ს მიმართ განსაზღვრულ ფსევდოანალიზურ p-დიფერენციალურ ფორმათა კონის კოჰომოლოგიის q-ური ჯგუფი იზომორფულია $\overline{\partial}_\alpha$-ს p-ური დოლბოს კომპლექსის q-ური კოჰომოლოგიის ჯგუფისა, ანუ:

$$H^q\left(X, \Psi_{X,\alpha}^P\right) \cong H_{\overline{\partial}_\alpha}^{p,q}(X).$$

დამტკიცება. $\overline{\partial}_\alpha$-პუანკარეს ლემის ძალით კომპლექსი

$$0 \to \Psi_{X,\alpha}^P \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q-1} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q+1} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \cdots$$

$\Psi_{X,\alpha}^P$ კონის აციკლური რეზოლვენტია, ვინაიდან თვითოეული $\mathcal{A}_X^{p,q}$ აციკლურია; რაც ნიშნავს, რომ, $\overline{\partial}_\alpha$-პუანკარეს ლემის ძალით, ყოველი $Q \in X$ წერტილისათვის ფენათა ჰომომორფიზმთა კომპლექსი

$$0 \to \Psi_{X,\alpha,Q}^P \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{A}_{X,Q}^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_{X,Q}^{p,1} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_{X,Q}^{p,q-1} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_{X,Q}^{p,q} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_{X,Q}^{p,q+1} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \cdots$$

ზუსტია და, მაშასადამე, ზუსტია ასევე მიმდევრობაც

$$0 \to \Psi_{X,\alpha}^P \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,1} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q-1} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{A}_X^{p,q+1} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \cdots;$$

აღნიშნვებით

$$\mathcal{Z}_X^{p,q} := \ker\left(\overline{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q} \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}\right),$$

გვაქვს შემდეგი კონათა მოკლე ზუსტი მიმდევრობა

$$0 \to \Psi_{X,\alpha}^P \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{A}_X^{p,0} \xrightarrow{\overline{\partial}_\alpha} \mathcal{Z}_X^{p,1} \to 0,$$

რომლის შესაბამის კოჰომოლოგიის ჯგუფთა გრძელ მიმდევრობას $\mathcal{A}_X^{p,q}$-ის არანულოვანი რიგის კოჰომოლოგიის ჯგუფთა ტრივიალურობის გამო აქვს შემდეგი სახე

$$0 \to \Gamma\left(X, \Psi_{X,\alpha}^{P}\right) \to \Gamma\left(X, \mathcal{A}_X^{p,0}\right) \to \Gamma\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}\right) \to H^1\left(X, \Psi_{X,\alpha}^{P}\right) \to 0 \to H^1\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}\right) \to \cdots$$
$$\to H^{q-1}\left(X, \Psi_{X,\alpha}^{P}\right) \to 0 \to H^{q-1}\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}\right) \to H^{q}\left(X, \Psi_{X,\alpha}^{P}\right) \to 0 \to H^{q}\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}\right)$$
$$\to \cdots,$$

საიდანაც

$$H^{q}\left(X, \Psi_{X,\alpha}^{P}\right) \cong H^{q-1}\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}\right),$$

ანალოგიურად კონათა მოკლე ზუსტი მიმდევრობის

$$0 \to \mathcal{Z}_X^{p,1} \overset{\mathrm{Id}}{\to} \mathcal{A}_X^{p,1} \overset{\overline{\partial}_\alpha}{\to} \mathcal{Z}_X^{p,2} \to 0$$

განხილვით დავასკვნით, რომ

$$H^{q-1}\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}\right) \cong H^{q-2}\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,2}\right);$$

ამგვარად ვღებულობთ იზომორფიზმთა შემდეგ ჯაჭვს

$$H^{q}\left(X, \Psi_{X,\alpha}^{P}\right) \cong H^{q-1}\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}\right) \cong H^{q-2}\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,2}\right) \cong \cdots \cong H^{1}\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,q-1}\right);$$

მოკლე ზუსტი მიმდევრობის

$$0 \to \mathcal{Z}_X^{p,q-1} \overset{\mathrm{Id}}{\to} \mathcal{A}_X^{p,q-1} \overset{\overline{\partial}_\alpha}{\to} \mathcal{Z}_X^{p,q} \to 0$$

შესაბამისი გრძელი ზუსტი მიმდევრობიდან

$$0 \to \Gamma\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,q-1}\right) \to \Gamma\left(X, \mathcal{A}_X^{p,q-1}\right) \to \Gamma\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,q}\right) \to H^1\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,q-1}\right) \to 0 \to \cdots$$

კი

$$H^{1}\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,q-1}\right) \cong \Gamma\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,q}\right) \Big/ \overline{\partial}_\alpha\left(\Gamma\left(X, \mathcal{A}_X^{p,q-1}\right)\right)$$
$$= \ker\left(\overline{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q}(X) \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X)\right) \Big/ \mathrm{im}\left(\overline{\partial}_\alpha : \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X) \to \mathcal{A}_X^{p,q}(X)\right) = H_{\overline{\partial}_\alpha}^{p,q}(X),$$

მაშასადამე,

$$H^{1}\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,q-1}\right) \cong H_{\overline{\partial}_\alpha}^{p,q}(X).$$

□

ჰოლომორფული m რანგის ვექტორული ფიბრაციისთვის

$$p: E \to X$$

აღვნიშნოთ $\mathcal{A}_X^{p,q}(-, E) \equiv \mathcal{A}_X^{p,q}(E)$-ით კონა

$$U \mapsto \mathcal{A}_X^{p,q}(U, E) \equiv \mathcal{A}_X^{p,q}(E)(U) := \Gamma\left(U, \left(\bigwedge^{p,q} X\right) \otimes E\right),$$

ბუნებრივი შეზღუდვის ჰომომორფიზმებით.

განსაზღვრება.

$$\overline{\partial}_{E,\alpha}\colon \mathcal{A}_X^{p,q}(E) \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}(E)$$

$$\Gamma\left(U, \mathcal{A}_X^{p,q}(E)\right) \ni \omega \mapsto \overline{\partial}_{E,\alpha}(\omega) = \overline{\partial}_{E,\alpha}\left(\sum_{j=1}^{m} \omega_j \otimes \sigma_j\right) := \sum_{j=1}^{m} \overline{\partial}_{\alpha}\left(\omega_j\right) \otimes \sigma_j$$

$$\in \Gamma\left(U, \mathcal{A}_X^{p,q+1}(E)\right),$$

სადაც $\left(\sigma_j\colon U \to E\right)_{j=1}^{m}$ მატრივიალიზებელი კვეთებია; ეს განსაზღვრება კორექტულია, ვინაიდან ნებისმიერი სხვა მატრივიალიზებელი კვეთებისათვის $(\sigma'_k\colon U' \to E)_{k=1}^{m}$ $U \cap U' \neq \emptyset$-ით, თანაკვეთაზე:

$$\overline{\partial}_{E,\alpha}\left(\sum_{j=1}^{m} \omega_j \otimes \left(\sum_{k=1}^{m} g_{jk}\sigma'_k\right)\right) = \overline{\partial}_{E,\alpha}\left(\sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jk}\omega_j\right) \otimes \sigma'_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \overline{\partial}_{E,\alpha}\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jk}\omega_j\right) \otimes \sigma'_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{m} g_{jk}\overline{\partial}_{\alpha}\left(\omega_j\right)\right) \otimes \sigma'_k = \sum_{j=1}^{m} \overline{\partial}_{\alpha}\left(\omega_j\right) \otimes \left(\sum_{k=1}^{m} g_{jk}\sigma'_k\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \overline{\partial}_{\alpha}\left(\omega_j\right) \otimes \sigma_j.$$

თუ $\alpha \in \mathcal{A}_X^{0,1}(X)$ ჩაკეტილია $\overline{\partial}$-ის მიმართ, მაშინ

$$0 \to \mathcal{A}_X^{p,0}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}_X^{p,1}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha}} \mathcal{A}_X^{p,q-1}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}_X^{p,q}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}_X^{p,q+1}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \cdots,$$

მიმდევრობა კომპლექსია და, შესაბამისად, იგივე სამართლიანია გლობალური კვეთების მოდულებთა მიმდევრობისთვისაც; ამ უკანასკნელის კოჰომოლოგიის ჯგუფები აღვნიშნოთ:

$$H_{\overline{\partial}_{\alpha}}^{p,q}(X,E) := \ker\left(\overline{\partial}_{E,\alpha}\colon \mathcal{A}_X^{p,q}(X,E) \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}(X,E)\right) \Big/ \operatorname{im}\left(\overline{\partial}_{E,\alpha}\colon \mathcal{A}_X^{p,q-1}(X,E) \to \mathcal{A}_X^{p,q}(X,E)\right).$$

თეორემა.

$$H^q\left(X, \Psi_{X,\alpha}^{p} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}\right) \cong H_{\overline{\partial}_{E,\alpha}}^{p,q}(X,E).$$

დამტკიცება.

ყოველი წერტილისათვის $Q \in X$:

$$\left(\Psi_{X,\alpha}^{p} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}\right)_Q \cong \Psi_{X,\alpha,Q}^{p} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_Q$$

და

$$\mathcal{A}_{X,Q}^{p,q}(E) \cong \mathcal{A}_{X,Q}^{p,q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_Q;$$

შესაბამისად, გვაქვს ორი იზომორფული კომპლექსი

$$0 \to \left(\Psi^p_{X,\alpha} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}\right)_Q \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{A}^{p,0}_{X,Q}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,1}_{X,Q}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,q-1}_{X,Q}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,q}_{X,Q}(E)$$
$$\xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,q+1}_{X,Q}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \cdots$$

და

$$0 \to \Psi^p_{X,\alpha,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_{Q_Q} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{A}^{p,0}_{X,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_Q \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,1}_{X,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_Q \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E},} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,q-1}_{X,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_Q$$
$$\xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,q}_{X,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_Q \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,q+1}_{X,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_Q \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \cdots$$

მაშასადამე, ამ კომპლექსთაგან თვითოეული ზუსტია მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც ზუსტია მეორე; უკანასკნელი კომპლექსის სიზუსტის საჩვენებლად განვიხილოთ ბირთვის ელემენტი $\sum_{j=1}^m [\omega_j] \otimes [\sigma_j] \in \mathcal{A}^{p,q}_{X,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_Q$, ანუ:

$$\overline{\partial}_{\alpha,E}\left(\sum_{j=1}^m [\omega_j] \otimes [\sigma_j]\right) = \sum_{j=1}^m [\overline{\partial}_\alpha(\omega_j)] \otimes [\sigma_j] = 0,$$

საიდანაც გამომდინარეობს, რომ ყოველი $j \in \{1, \dots, m\}$ -ისთვის $[\overline{\partial}_\alpha(\omega_j)] = 0$, რაც ნიშნავს, რომ არსებობს ღია მიდამო $Q \in U$, რომელზეც $\overline{\partial}_\alpha(\omega_j)$-ფორმის შეზღუდვა ნულია, ანუ

$$\overline{\partial}_\alpha(\omega_j)|_U = 0,$$

რაც $\overline{\partial}_\alpha$-პუანკარეს ლემის ძალით ნიშნავს რომ არსებობს მიდამო $Q \in V \subseteq U$, რომელზეც ω_j-ის შეზღუდვა $\overline{\partial}_\alpha$-ზუსტია, მაშასადამე, მოიძებნება $\eta_j \in \mathcal{A}^{p,q-1}_X(V)$ ისეთი, რომ

$$\omega_j|_V = \overline{\partial}_\alpha(\eta_j) \in \mathcal{A}^{p,q}_X(V),$$

რაც ნიშნავს, რომ ω_j და $\overline{\partial}_\alpha(\eta_j)$ ერთი და იმავე ექვივალენტობის კლასის წარმომადგენელნი არიან, ანუ

$$[\omega_j] = [\overline{\partial}_\alpha(\eta_j)] = \overline{\partial}_\alpha[\eta_j],$$

მაშასადამე

$$\sum_{j=1}^m [\omega_j] \otimes [\sigma_j] = \sum_{j=1}^m (\overline{\partial}_\alpha[\eta_j]) \otimes [\sigma_j] = \overline{\partial}_{\alpha,E}\left(\sum_{j=1}^m [\eta_j] \otimes [\sigma_j]\right),$$
$$\sum_{j=1}^m [\eta_j] \otimes [\sigma_j] \in \mathcal{A}^{p,q-1}_{X,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_Q,$$

რაც ნიშნავს, რომ

$$0 \to \Psi^{p}_{X,\alpha,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_{Q_{Q}} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{A}^{p,0}_{X,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_{Q} \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha}} \mathcal{A}^{p,1}_{X,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_{Q} \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha}} \mathcal{A}^{p,q-1}_{X,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_{Q}$$

$$\xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha}} \mathcal{A}^{p,q}_{X,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_{Q} \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha}} \mathcal{A}^{p,q+1}_{X,Q} \otimes_{\mathcal{O}_{X,Q}} \mathcal{E}_{Q} \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha}} \cdots$$

კომპლექსი ზუსტია, მაშასადამე ზუსტია

$$0 \to \left(\Psi^{p}_{X,\alpha} \otimes_{\mathcal{O}_{X}} \mathcal{E}\right)_{Q} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{A}^{p,0}_{X,Q}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,1}_{X,Q}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,q-1}_{X,Q}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,q}_{X,Q}(E)$$

$$\xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,q+1}_{X,Q}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \cdots$$

კომპლექსიც და შესაბამისად

$$0 \to \Psi^{p}_{X,\alpha} \otimes_{\mathcal{O}_{X}} \mathcal{E} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{A}^{p,0}_{X}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,1}_{X}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \cdots \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,q-1}_{X}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,q}_{X}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{A}^{p,q+1}_{X}(E)$$

$$\xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \cdots$$

კომპლექსიც; აღნიშნვით

$$\mathcal{Z}^{p,q}_{X}(E) := \ker\left(\overline{\partial}_{\alpha}: \mathcal{A}^{p,q}_{X}(E) \to \mathcal{A}^{p,q+1}_{X}(E)\right),$$

მიმდევრობა

$$0 \to \Psi^{p}_{X,\alpha} \otimes_{\mathcal{O}_{X}} \mathcal{E} \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{A}^{p,0}_{X}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{Z}^{p,1}_{X}(E) \to 0$$

მოკლე ზუსტი მიმდევრობაა, შესაბამისი კოჰომოლოგიის ჯგუფთა გრძელ ზუსტ მიმდევრობას, გამომდინარე იქიდან, რომ $\mathcal{A}^{p,q}_{X}(E)$ კონათა $q \geq 1$ რიგის კოჰომოლოგიის ჯგუფები ტრივიალურია, ექნება სახე

$$0 \to \Gamma\left(X, \Psi^{p}_{X,\alpha} \otimes_{\mathcal{O}_{X}} \mathcal{E}\right) \to \Gamma\left(X, \mathcal{A}^{p,0}_{X}(E)\right) \to \Gamma\left(X, \mathcal{Z}^{p,1}_{X}(E)\right) \to H^{1}\left(X, \Psi^{p}_{X,\alpha} \otimes_{\mathcal{O}_{X}} \mathcal{E}\right) \to 0$$

$$\to H^{1}\left(X, \mathcal{Z}^{p,1}_{X}(E)\right) \to \cdots \to H^{q-1}\left(X, \Psi^{p}_{X,\alpha} \otimes_{\mathcal{O}_{X}} \mathcal{E}\right) \to 0 \to H^{q-1}\left(X, \mathcal{Z}^{p,1}_{X}(E)\right)$$

$$\to H^{q}\left(X, \Psi^{p}_{X,\alpha} \otimes_{\mathcal{O}_{X}} \mathcal{E}\right) \to 0 \to H^{q}\left(X, \mathcal{Z}^{p,1}_{X}(E)\right) \to \cdots,$$

საიდანაც

$$H^{q}\left(X, \Psi^{p}_{X,\alpha} \otimes_{\mathcal{O}_{X}} \mathcal{E}\right) \cong H^{q-1}\left(X, \mathcal{Z}^{p,1}_{X}(E)\right),$$

ანალოგიურად მოკლე ზუსტი მიმდევრობიდან

$$0 \to \mathcal{Z}^{p,1}_{X}(E) \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{A}^{p,1}_{X}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{Z}^{p,2}_{X}(E) \to 0$$

გამომდინარეობს, რომ

$$H^{q-1}\left(X, \mathcal{Z}^{p,1}_{X}(E)\right) \cong H^{q-2}\left(X, \mathcal{Z}^{p,2}_{X}(E)\right)$$

და

$$H^q\left(X, \Psi^p_{X,\alpha} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{E}\right) \cong H^{q-1}\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,1}(E)\right) \cong H^{q-2}\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,2}(E)\right) \cong \cdots \cong H^1\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,q-1}(E)\right),$$

მოკლე ზუსტი მიმდევრობის

$$0 \to \mathcal{Z}_X^{p,q-1}(E) \xrightarrow{\mathrm{Id}} \mathcal{A}_X^{p,q-1}(E) \xrightarrow{\overline{\partial}_{\alpha,E}} \mathcal{Z}_X^{p,q}(E) \to 0$$

შესაბამისი კოჰომოლოგიის ჯგუფთა გრძელი ზუსტი მიმდევრობიდან

$$0 \to \Gamma\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,q-1}(E)\right) \to \Gamma\left(X, \mathcal{A}_X^{p,q-1}(E)\right) \to \Gamma\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,q}(E)\right) \to H^1\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,q-1}(E)\right) \to 0 \to \cdots$$

კი:

$$H^1\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,q-1}(E)\right) \cong \Gamma\left(X, \mathcal{Z}_X^{p,q}(E)\right) \Big/ \overline{\partial}_{\alpha,E}\left(\Gamma\left(X, \mathcal{A}_X^{p,q-1}(E)\right)\right)$$

$$= \ker\left(\overline{\partial}_{\alpha,E} \colon \mathcal{A}_X^{p,q}(E) \to \mathcal{A}_X^{p,q+1}(E)\right) \Big/ \overline{\partial}_{\alpha,E}\left(\Gamma\left(X, \mathcal{A}_X^{p,q-1}(E)\right)\right) = H^{p,q}_{\overline{\partial}_{E,\alpha}}(X, E).$$

□

ბიბლიოგრაფია

[1] L. Bers: Theory of pseudo-analytic functions. New York University, 1950.

[2] P. Griffiths, J. Harris: Pirinciples of Algebraic Geometry. A Wiley-Interscience Publication, 1978.

[3] D. Huybrechts: Complex Geometry, An Introduction. Springer-Verlag New York, 1991.